高周波回路の基礎

牧野 泰才

平成 17 年 5 月 26 日

1　はじめに

低周波の回路では、伝送線路の長さに対して信号の波長が十分長いため、信号線の両端の位相差などを考える必要がない。例えば 3kHz の信号では、波長が 100km なので、数 m 程度の配線は無視できる。つまり低周波の場合には、その配線上の位置に関係なく信号の振幅と位相はどこでも等しいという近似を、無意識のうちに行なっている。

一方、高周波回路では、伝送線路の長さと信号の波長が同程度のサイズであるため、信号線の位置によって振幅と位相に差が生じてしまう。低周波回路のような近似が成立しないため、集中定数系で扱うことが出来ない。

このような高周波回路を扱う際、電圧や電流を測定するのは困難である。プローブなどを回路に接触させると、そのプローブの長さに対応して新たな回路が形成されてしまうからである。高周波では、安定して測定できる電力を扱う。測定したい対象に対して、どの程度電力を供給することができ、どの程度反射してしまうかを測定する。それを表すパラメータとして用いられるのが S パラメータであり、測定装置がネットワークアナライザである。

2　分布定数系回路の基礎方程式

2 つの導体からなる x 方向に無限に長い導線 (伝送線路) を考える。ここで、以下のように各値を定義する。

$i(x)$:　位置 x の導線を流れる電流

$v(x)$:　位置 x での電圧

単位長さあたりの…

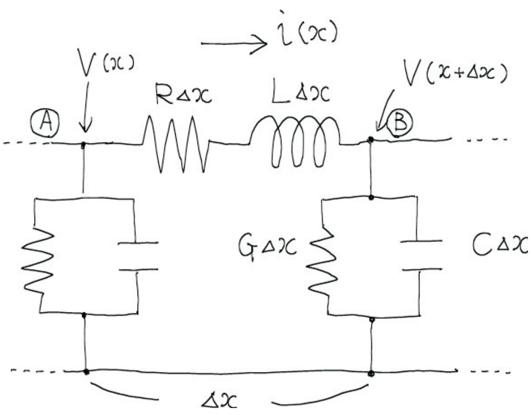

図 1: 1 次元分布定数系回路

Z:　インピーダンス

R:　抵抗

L:　インダクタンス

Y:　アドミッタンス

C:　キャパシタンス

G:　コンダクタンス

a) 一般的な場合

A-B 間の電圧則より、

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(x+\Delta x) - v(x) \quad (1)\\ &= -R\Delta x\ i(x) - L\Delta x\ \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (2) \end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -Ri(x) - L\frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (3)$$

同様に A の電流則から、

$$\begin{aligned} \Delta i &= i(x) - i(x-\Delta x) \quad (4)\\ &= -G\Delta x\ v(x) - C\Delta x\ \frac{\partial v(x)}{\partial t} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -Gv(x) - C\frac{\partial v(x)}{\partial t} \tag{6}$$

式 (3)(6) の $\Delta x \to 0$ の極限を取れば、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gi + C\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。この 2 式は伝送方程式と呼ばれる。
片方の式を x で、もう片方の式を t でそれぞれ偏微分し、まとめることを考えると…

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial t} \tag{8}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial i}{\partial x} = G\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{9}$$

より、$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial t}$ を代入して、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv \tag{10}$$

対称性から、電流に関しても同じ式が得られる。これは双曲型と呼ばれる 2 階の 2 変数偏微分方程式で、一般に解けない。そこで次節では特定の解を仮定して解くことを考える。

b) 正弦波交流、定常解を仮定した場合

$$\tilde{v} = V\exp(\mathrm{j}\omega t), \tilde{i} = I\exp(\mathrm{j}\omega t) \tag{11}$$

これを式 (7) に代入すると…

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = (R + \mathrm{j}\omega L)I \tag{12}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = (G + \mathrm{j}\omega C)V \tag{13}$$

ここで $Z = R+\mathrm{j}\omega L$(インピーダンス), $Y = G+\mathrm{j}\omega C$(アドミッタンス) とおく。この両式を x で微分すると…

$$-\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -Z\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = ZYV \tag{14}$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}x^2} = YZI \tag{15}$$

この 2 式は同一と見てよい。

c) b) の一般解

$\gamma^2 = ZY$ とおく。このとき γ を伝搬定数と呼ぶ。一般解は $V = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ とおくと、$\alpha^2 = \gamma^2$ より、$\alpha = \pm\gamma$ なので、この 2 つの解の線形和で表されるから、

$$V = V_1\mathrm{e}^{-\gamma x} + V_2\mathrm{e}^{+\gamma x} \tag{16}$$

よって、$\tilde{v} = V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ に代入すれば解となる。
これを x で 1 階微分したものは、

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = V_1\gamma\mathrm{e}^{-\gamma x} - V_2\gamma\mathrm{e}^{+\gamma x} = ZI \tag{17}$$

の関係があるので Z で割ると、

$$I = \frac{V_1\gamma}{Z}\mathrm{e}^{-\gamma x} - \frac{V_2\gamma}{Z}\mathrm{e}^{+\gamma x} \tag{18}$$

ここで、特性インピーダンス Z_0 を

$$Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}} \tag{19}$$

のように定義すると、電流 I は、

$$I = \frac{1}{Z_0}(V_1\mathrm{e}^{-\gamma x} - V_2\mathrm{e}^{+\gamma x}) \tag{20}$$

とかける。この特性インピーダンスは定義式より明らかに、単位長さあたりのインピーダンスとアドミッタンスとで決定される。よって、導線が均一な物体で構成されている場合、特性インピーダンスは導線の長さによらず固有の値となる。一般的な同軸ケーブル等では、50Ω が用いられる。

d) c) の損失が少ない場合

伝送時に損失を生じるのは、R と G の成分である。今インダクタンス成分 L、コンダクタンス成分 C に対して、十分 R,G が小さいと仮定する。すなわち、$\frac{R}{L\omega}, \frac{G}{C\omega} \ll 1$ と仮定する。伝搬定数 γ は $\gamma = \sqrt{ZY}$ なので、

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(R + \mathrm{j}\omega t)\cdot(G + \mathrm{j}\omega t)\}^{\frac{1}{2}} && (21) \\ &= \{RG - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega(RC + LG)\}^{\frac{1}{2}} && (22) \\ &= (-LC\omega^2)^{\frac{1}{2}}\{1 - \frac{RG}{LC\omega^2} - \mathrm{j}(\frac{G}{C\omega} + \frac{R}{L\omega})\}^{\frac{1}{2}} && (23) \end{aligned}$$

ここで仮定より $\frac{R}{L\omega}, \frac{G}{C\omega} \ll 1$ なので、それの積である第 2 項を無視してもよい。また、高周波帯では $\frac{R}{L\omega} \gg \frac{G}{C\omega}$

となるので (この近似が成り立つことが多いので)、第 3 項も無視する。ここで、$(1-x)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}x$ という近似を用いれば結局上式は、

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}(1-\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{R}{L\omega}) \tag{24}$$

と表される。伝搬定数 γ を $\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta$ のように実部と虚部とに分けて表現すると、一般解で γ が exp の肩に乗っていたことを考えれば、虚部が振動成分を表現し、実部がその包絡を表現することがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}\alpha &= \tfrac{R}{2}\sqrt{\tfrac{C}{L}} &&:\text{減衰定数}\\ \beta &= \omega\sqrt{LC} &&:\text{位相定数}\end{aligned}$$

よって、$v=V_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta x)}\mathrm{e}^{-\alpha x}+V_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta x)}\mathrm{e}^{\alpha x}$ と書ける。ここで、$\mathrm{e}^{\pm\alpha x}$ は減衰項を表し、$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t\pm\beta x)}$ は x の正負の方向に伝搬する波を表す。無限長の線路を考えた場合、反射波が 0 であるから、右辺の第 2 項が存在しない。$x=\infty$ でも $v\neq 0$ のためには、減衰定数 α が小さければよい。

e) 損失がない場合 (実際にはありえない)

損失が 0 の場合、すなわち $R, G=0$ のとき、

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{25}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{26}$$

より、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

という波動方程式が導かれる。$c_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ とおくと、この方程式の解は、

$$v=f_1(x-c_0t)+f_2(x+c_0t) \tag{30}$$

と言う形の D'Ambelt 解となる。これは f_1, f_2 がその形を保ったまま伝搬していく解である。

3　波動の反射

図のような線路を考えた場合、前節の結果において $x\to -x$ の場合を考えると、

$$V(x) = V_1\mathrm{e}^{\gamma x}+V_2\mathrm{e}^{-\gamma x} \tag{31}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(V_1\mathrm{e}^{\gamma x}-V_2\mathrm{e}^{-\gamma x}) \tag{32}$$

このとき、入射波と反射波の比率を反射係数といい、

$$\Gamma(x)=\frac{V_2\mathrm{e}^{-\gamma x}}{V_1\mathrm{e}^{\gamma x}}=\frac{V_2}{V_1}\mathrm{e}^{-2\gamma x} \tag{33}$$

のように表される。ここで $\frac{V_2}{V_1}=\Gamma(0)$ とおけば、$\Gamma(x)=\Gamma(0)\mathrm{e}^{-2\gamma x}$ と表されるから、$V(x), I(x)$ はそれぞれ、

$$V(x) = V_1\mathrm{e}^{\gamma x}(1+\Gamma(x)) \tag{34}$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}V_1\mathrm{e}^{\gamma x}(1-\Gamma(x)) \tag{35}$$

となる。

4　入力インピーダンス

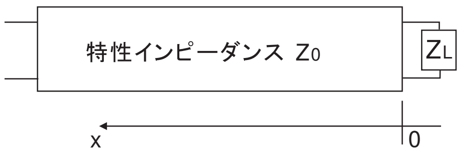

図 2: 1 次元伝送線路

1 次元の伝送線路の場合、負荷インピーダンス Z_L の位置を $x=0$ としたときの位置 x における入力インピーダンス $Z(x)$ は、

$$Z(x)=\frac{V(x)}{I(x)}=Z_0\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)} \tag{36}$$

と書ける。ここで Z_0 は伝送線路の特性インピーダンス、$\Gamma(x)$ は位置 x における反射係数を表す。この式を書き換えると、

$$\Gamma=\frac{Z(x)-Z_0}{Z(x)+Z_0} \tag{37}$$

であるから、$x=0$ すなわち終端での反射係数は、

$$\Gamma=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{38}$$

となる。特性インピーダンス Z_0 で終端した場合 ($Z_L=Z_0$)、反射係数は 0 となり、そのときの入力インピーダンスは場所に依らず Z_0 となる。

5 スミスチャート

反射係数は、(36) 式より

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{39}$$

と表される。ここでインピーダンスは複素数であることから、反射係数 Γ も複素数の値となる。そこで $\Gamma = \Gamma_r + \mathrm{j}\Gamma_i$ とおく。

ここで、正規化したインピーダンスを

$$z = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R + \mathrm{j}X}{Z_0} = r + \mathrm{j}x \tag{40}$$

と定義すると、式 (36) より、

$$\begin{aligned} z &= r + \mathrm{j}x \\ &= \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \\ &= \frac{1+\Gamma_r+\mathrm{j}\Gamma_i}{1-\Gamma_r-\mathrm{j}\Gamma_i} \end{aligned} \tag{41}$$

となる。それぞれ実部と虚部に分けて書けば、

$$r = \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{1+\Gamma_r^2-2\Gamma_r+\Gamma_i^2} \tag{42}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{1+\Gamma_r^2-2\Gamma_r+\Gamma_i^2} \tag{43}$$

である。後述する S パラメータにおいて得られる値は反射係数 $\Gamma = \Gamma_r + \mathrm{j}\Gamma_i$ であることから、Γ_r と Γ_i をそれぞれ実軸と虚軸に取った際に、負荷インピーダンスがどのように表現されるのかを把握することが重要である。

まず実部 (42) を変形すると、

$$\begin{aligned} r + r\Gamma_r^2 - 2r\Gamma_r + r\Gamma_i^2 &= 1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2 \\ r\Gamma_r^2 - 2r\Gamma_r + r\Gamma_i^2 + \Gamma_r^2 + \Gamma_i^2 &= 1 - r \\ (1+r)\Gamma_r^2 - 2r\Gamma_r + (1+r)\Gamma_i^2 &= 1 - r \\ \Gamma_r^2 - \frac{2r}{1+r}\Gamma_r + \Gamma_i^2 &= \frac{1-r}{1+r} \\ (\Gamma_r - \frac{r}{1+r})^2 + \Gamma_i^2 &= \frac{1-r}{1+r} + \frac{r^2}{(1+r)^2} \\ (\Gamma_r - \frac{r}{1+r})^2 + \Gamma_i^2 &= (\frac{1}{1+r})^2 \end{aligned} \tag{44}$$

これは、中心座標が $(\frac{r}{1+r}, 0)$、半径が $\frac{1}{1+r}$ の円の方程式を表す。r の値に依らず、この方程式で表される円は $(\Gamma_r, \Gamma_i) = (1, 0)$ を通る。インピーダンスの実部は抵抗であるから、$r \geq 0$ の領域を考えればよく、半径が最大になるのは $r = 0$ のときであり、そのときの値は 1 となる。図 3 は $\Gamma_r - \Gamma_i$ 平面における、負荷インピーダンスの実部一定のラインである。

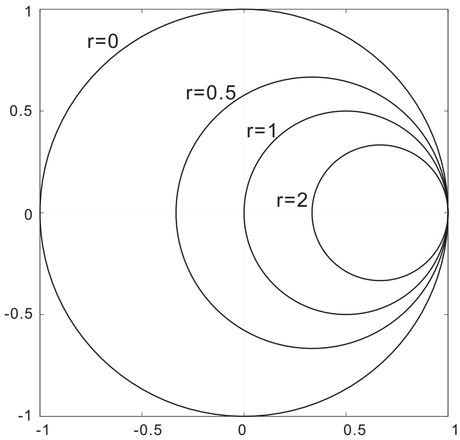

図 3: 反射係数：実部一定ライン

同様にして、式 (43) を変形すると、

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma_r^2 - 2\Gamma_r + \Gamma_i^2 &= \frac{2\Gamma_i}{x} \\ \Gamma_r^2 - 2\Gamma_r + 1 + \Gamma_i^2 - \frac{2\Gamma_i}{x} &= 0 \\ (\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - \frac{1}{x})^2 &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} \tag{45}$$

これは、中心座標が $(1, \frac{1}{x})$、半径が $\frac{1}{x}$ の円の方程式を表す。x の値に依らず、この方程式で表される円は $(\Gamma_r, \Gamma_i) = (1, 0)$ を通る。実部の場合と異なり、インピーダンスの虚部は正負ともに取りうる。これは、実軸対称に同一の円が存在していることに対応する。$x = 0$ のときは実軸上であり、純抵抗であることに対応する。図 4 は虚部一定のラインを示す。

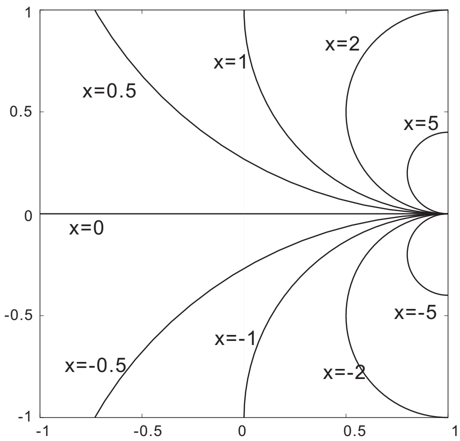

図 4: 反射係数：虚部一定ライン

この二つを重ねて表記したものがスミスチャートで

ある (図 5)。直感的な解釈としては、右半平面 (実部が正) のみの複素数平面において、虚軸の $+\infty$ と $-\infty$ を丸めて実軸の $+\infty$ で結んだようなものと考えられる。

また、このときの各軸は反射係数 Γ の実部と虚部であったから、そのまま直交座標系で値を読めば反射係数が得られる。実軸上チャートの右端では $r=\infty$ の開放端反射の場合に対応し、位相は変化せず反射係数は 1。一方左端では、$r=0$ の固定端反射 (ショート) に対応し、位相が 180 °反転するので反射係数は -1 となる。

電力消費という観点でチャートを見ると、周辺部では反射係数の絶対値が 1 なので、まったく電力を消費しない。中心に近づくにつれて電力を消費し、原点では反射係数 0 となり、入射した電力の全てを消費する。

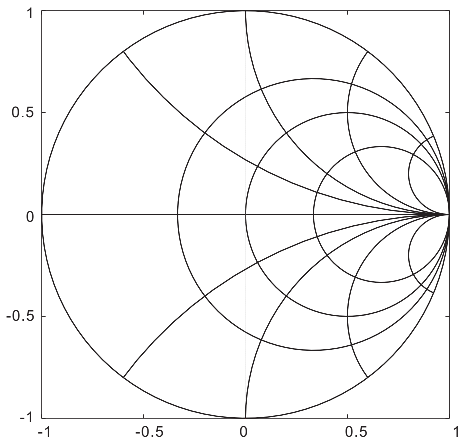

図 5: スミスチャート

素子を並列に接続するようなときには、アドミタンスで考えるのが便利になる。式 (38) をアドミタンスで書き換えると、

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \\ &= \frac{1/Y_L - 1/Y_0}{1/Y_L + 1/Y_0} \\ &= \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}\end{aligned} \tag{46}$$

これを特性アドミタンス Y_0 で割って規格化すれば ($y = Y_L/Y_0$)、結局反射係数 Γ は

$$\Gamma = \frac{1-y}{1+y} \tag{47}$$

となる。これはインピーダンスによる反射係数の表記にマイナス符号がついたものとなる。すなわち、スミスチャートを 180 °回転したものがアドミタンスチャートになる。これを重ねて表記したものをイミタンスチャートと呼ぶ。

6 S パラメータ

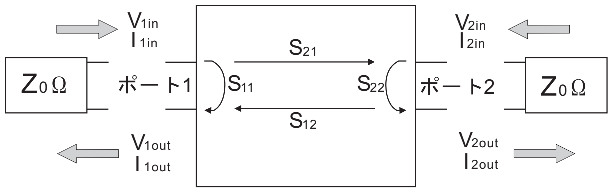

図 6: 2 端子対回路

高周波回路では低周波のように電圧や電流をそのまま測定することが困難である。そのため安定して正確に測定可能な電力で回路の特性を表現する。

図 6 のような 2 端子対回路を考える。ポート 1 から入り込む進行波の電圧、電流をそれぞれ v_{1in}, i_{1in}、後退波を v_{1out}, i_{1out} とおく。このとき流入するトータルの電圧、電流はこれらの和で書けて、

$$v_1 = v_{1in} + v_{1out} \tag{48}$$

$$i_1 = i_{1in} + i_{1out} \tag{49}$$

である。

ここで、入力波 a_1 と、出力波 b_1 を

$$a_1 = \frac{v_{1in}}{\sqrt{Z_0}} = i_{1in}\sqrt{Z_0} \tag{50}$$

$$b_1 = \frac{v_{1out}}{\sqrt{Z_0}} = i_{1out}\sqrt{Z_0} \tag{51}$$

$$\tag{52}$$

と定義する。ここで注意すべきは、特性インピーダンス Z_0 は回路内部ではなく、出入り口外側の伝送線路の特性インピーダンスを示す点である。一般的には、50Ω の伝送線路が用いられるので、$Z_0 = 50\Omega$ が用いられる。この a_n, b_n は振幅と位相の情報を持つ複素量であり、2 乗するとエネルギーとなる量である。ポート 1 から流入する電力 P_1 は、

$$P_1 = |a_1|^2 - |b_1|^2 \tag{53}$$

で表される。ポート 2 に対しても同様に a_2, b_2 が定義される。

ここで、ポート 2 側の伝送線路からの入力がない状態でポート 1 から信号を入れたときの、反射成分 b_1 に

ついて考えてみる。このとき生じる反射は大きく 4 つの要因からなる。1 つは伝送線路とポート 1 との間のインピーダンス不一致による反射。2 つめは測定対象内での反射。3 つめはポート 2 とそこに接続された伝送線路とのインピーダンス不一致による反射。そして 4 つめはポート 2 の伝送線路の端で反射して戻ってくる成分の内、ポート 2 から流入してくる成分である。よって、ポート 2 に接続された伝送線路の端をその特性インピーダンスで短絡した場合は、ポート 2 から出て行ったエネルギーは完全に消費されるため、4 つめの反射に関しては考えなくてよいことになる。

S パラメータ (scattering parameter) はこの a_n, b_n を結ぶパラメータであり、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

のように定義される。

これらの 4 つのパラメータは以下のように考えられる。

$$S_{11} = b_1/a_1 \quad (a_2 = 0) \tag{55}$$

$$S_{21} = b_2/a_1 \quad (a_2 = 0) \tag{56}$$

$$S_{12} = b_1/a_2 \quad (a_1 = 0) \tag{57}$$

$$S_{22} = b_2/a_2 \quad (a_1 = 0) \tag{58}$$

ここで $a_2 = 0$ という条件は、ポート 2 が Z_0 で終端されており、先述の 4 つめの反射を考慮しなくて良い条件であり、ポート 2 側からのエネルギーの流入がない状態を意味する。例えば S_{11} は、このように終端されているときのポート 1 における進行波と後退波の比率であるから、ポート 1 から測定対象を見たときの反射係数を示す。これは前述の反射係数 Γ と同じものである。この値はポート 2 についても同様に考えられるので、S_{22} はポート 2 から見たときの反射係数を示す。

S_{21} はポート 2 の整合が取れているときの $(a_2 = 0)$、ポート 1 からの入射電力に対するポート 2 で得られる出力電力の関係を表す。S_{12} は逆にポート 2 からポート 1 へ伝送される電力を示す。

これらの関係は次節のネットワークアナライザの説明の項における、ブロック図を見ると理解しやすいかもしれない。

ここでは、2 端子対回路について解説したが、端子が 1 つしかないような素子の入力インピーダンスを見たい場合には、S_{11} を見ればよい (ポート 2 が存在しないので、常に $a_2 = 0$ が成立している)。反射係数と入力インピーダンスの関係は前節で示したようにスミスチャート上で描かれる。例えば、対象としている素子の入力インピーダンスが $Z_0 \Omega$ の場合には、ポート 1 までの伝送線路と測定対象とのマッチングが完全に取れているので、入射した電力は全て吸収されてしまい、S_{11} は 0 となる。

7 ネットワークアナライザ

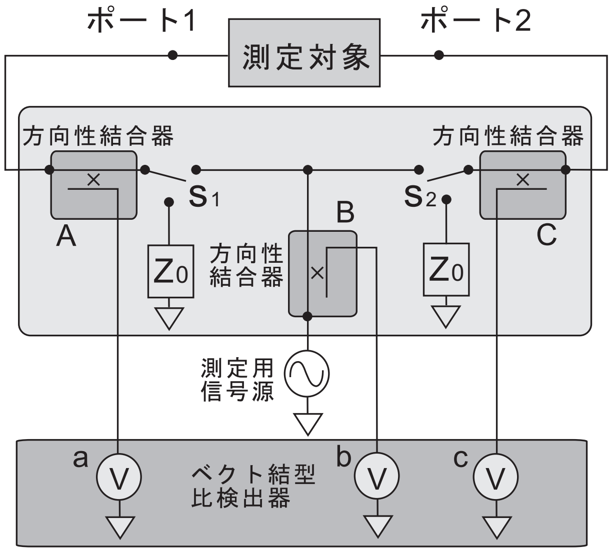

図 7: ネットワークアナライザ・ブロック図

ネットワークアナライザは S パラメータを測定する機器である。概略図を図 7 に示す。ポイントとなるのは方向性結合器である。これは特定の方向からの信号のみを取り出すものであり、例えば図中左側の結合器 A はポート 1 からの信号のみを検出する。このようにして選択的に得られた信号の振幅と位相がベクトル型の検出器 a〜c で検出される。

測定は以下のようにして行われる。まずスイッチ S_1 を信号源に、スイッチ S_2 を負荷インピーダンス Z_0 に接続する。この状態は S パラメータの項で述べた $a_2 = 0$ という状態に相当する。よって、検出器 a では S_{11}、検出器 c では S_{21} に関係する量が得られる。これら出力を、検出器 b で得られる入力端の振幅、位相と比較することで各パラメータとなる。

スイッチのオン状態をポート 1 と 2 で入れ替えることにより、同様の手順で S_{22}, S_{12} も得られる。これを各周波数で行うことで、被測定物の周波数特性を得ら

れる。

8 最大電力条件 (共役整合)

図 8 の回路を考える。このとき電流 I と負荷における電圧 V_L はそれぞれ

$$I = \frac{V_{in}}{Z_0 + Z_L} \tag{59}$$

$$V_L = Z_L I = \frac{Z_L V_{in}}{Z_0 + Z_L} \tag{60}$$

と書ける。このとき電力は

$$P_r = \mathrm{Re}[\mathrm{V_L} \cdot \mathrm{I}^*] = \frac{\mathrm{Z_L}|\mathrm{V_{in}}|^2}{|\mathrm{Z_0} + \mathrm{Z_L}|^2} \tag{61}$$

である。

高周波回路においては、送信側の電力を最大限負荷に供給することが目的となる。よって、この電力 P_r を最大にするような負荷 Z_L を考える。ここでインピーダンス $Z_,Z_L$ はそれぞれ複素数であるので、

$$Z_0 = R_0 + \mathrm{j}X_0 \tag{62}$$

$$Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L \tag{63}$$

とおくと、電力は

$$P_r = \mathrm{Re}[\frac{(\mathrm{R_L} + \mathrm{jX_L})|\mathrm{V_{in}}|^2}{(\mathrm{R_0} + \mathrm{R_L})^2 + (\mathrm{X_0} + \mathrm{X_L})^2}] = \frac{R_L|V_{in}|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2} \tag{64}$$

と表される。これを最大にするような R_L と X_L を考えるのであるが、分母の第 2 項 $(X_0 + X_L)^2$ の部分は、X_L として

$$X_L = -X_0 \tag{65}$$

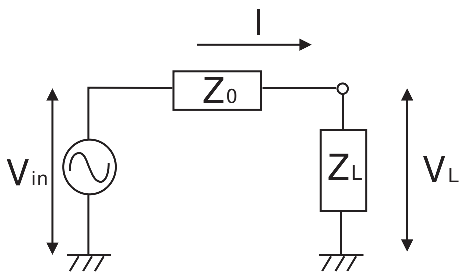

図 8: 特性インピーダンス Z_0 の伝送路に負荷 Z_L をつけた場合

をもってくれば 0 になる。これは R_L とは無関係に決定できる。よって、これが電力を最大にする 1 つめの条件である。

残りの部分の R_L に関係する部分を $f(R_L)$ とし、

$$f(R_L) = \frac{R_L}{(R_+ R_L)^2} \tag{66}$$

この関数を最大とする R_L を考える。この関数の導関数

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R_L} = \frac{(R_0 + R_L)^2 - 2R_L(R_0 + R_L)}{(R_0 + R_L)^4} \tag{67}$$

を 0 とするような R_L は、$R_L = \pm R_0$ であり、抵抗 $R > 0$ の条件から

$$R_L = R_0 \tag{68}$$

である。このとき関数 $f(R_L)$ が最大となる (図 9 参照)。これが実部に関する条件である。

以上の 2 つの条件を考慮すると結局消費電力が最大となる負荷インピーダンスは、

$$Z_L = R_0 - \mathrm{j}X_0 = Z_0^* \tag{69}$$

である。これは伝送線路の特性インピーダンスの複素共役である。よって、このようにして最大電力が得られるように負荷を選ぶことを共役整合と呼ぶ。このときの電力は

$$P_r = \frac{|V_i n|^2}{4R_L} \tag{70}$$

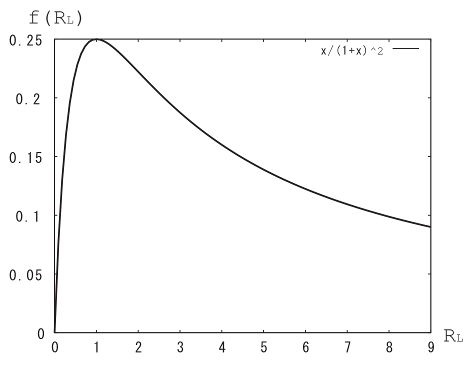

図 9: 関数 $f(R_L)$ ($R_0 = 1$ のとき)

ここで虚数部のマッチングが出来ている場合 ($X_L = -X_0$) を考えてみる。このとき負荷が短絡の場合 ($R_L = 0$)、式 (66) より消費電力 P_r は 0 である。同様に負荷が開放の場合も $P_r = 0$ となる。これは、終端が短絡、あるいは開放の場合に完全反射が生じ、負荷においてまったく電力が消費されないことに対応している。