特性インピーダンス

牧野 泰才

平成 19 年 12 月 11 日

1　はじめに

「高周波の回路は難しい」と一般的に言われる。しかし、果たしてどの周波数からが高周波なのかは明確ではない。なぜならそれは、「自分が考えている回路の物理的なサイズに対して、扱う信号の波長の大きさがどれほどか?」ということによって決定されるものだからである。

では、なぜ波長が重要なのか?

自分の考える回路サイズに対して、波長が十分大きい場合、回路に印加された交流信号はすべての場所で同相で変動する。例えば 30kHz の信号では、真空中の波長が 10km なので、仮に回路サイズが 10m であったとしても、回路の端から端で生じる位相の差異は $2\pi/1000$ 程度であり、回路内の信号は、ほぼ同相で駆動されていると考えられる。したがって、回路内で使用される配線は、コンデンサや抵抗といった各素子を等電位に接続するための媒体と考えて差し支えない。これが、集中定数回路の考え方であり、一般的に低周波回路と言われる。

では、回路のサイズに対して、波長が短い場合はどうなるか? 例えば、3GHz の信号では、真空中の波長が 10cm である。仮に回路のサイズが 2.5cm であった場合、回路の両端における位相差は $\pi/2$ の程度である。したがってこのような場合には、信号を波動として捉えなければならない。何も考えずに配線を設計してしまった場合には、波動の反射の影響により、電圧振幅がほとんど観測できない点や、逆に非常に大きな電圧を生じる点など、分布が発生してしまう。したがって、等電位で接続したい要素同士が、意図した電圧値で接続されないというような現象が容易に生じうる。

また、反射が生じるということは、自分の接続したい対象に対して、エネルギーが印加できていない状況である。効率よく信号を伝送するためには、配線で接続する場合にも、配線の特性を考えなければならない。

ここで必要となるのが、分布定数系の考え方であり、一般的に高周波回路と言われる。自身の考える回路サイズと、信号波長との関係が重要であるため、たとえ 50Hz($\lambda = 6000$km) であったとしても、配線長が数 1000km に及ぶ電力の伝送線などでは、やはりこのような考え方が必要となる。

このように、配線の特性が重要となる場合に、その配線の特性を示す値として、「特性インピーダンス」が利用される。そこで本稿では、特性インピーダンスとは何かを解説し、高周波回路の理解を深めることを目的とする。

なお、数 GHz 以上の場合において、特性のきちんとした配線であっても、コイルやコンデンサのような素子と同等の効果をもたらすことがある。例えば、$\lambda/4$ の長さをもつ配線においては、その両端の位相差が $\pi/2$ であることから、コイルやコンデンサとして機能する。これも高周波回路設計において難しい点の 1 つであるが、本稿では扱わない。

また、数 MHz の信号 ($\lambda \sim 100$m) を扱う場合でも回路が煩雑になるため、そういう意味で「高周波回路は難しい」と言われることもある。これは、容量性結合のインピーダンスが小さくなり、隣接配線間で干渉が生じ易くなったり、各 IC の動作性能の限界に近いため動作が不安定になったりということが問題であり、今回扱う問題とは別の要因であることに注意が必要である。

2　分布定数系回路の基礎方程式

単なる配線であっても、高周波の場合には反射等を考慮しなければならないことを説明した。では、どのように取り扱うべきか?

そこで、2 つの導体からなる x 方向に無限に長い導線 (伝送線路) を考え、以下のように各値を定義する。

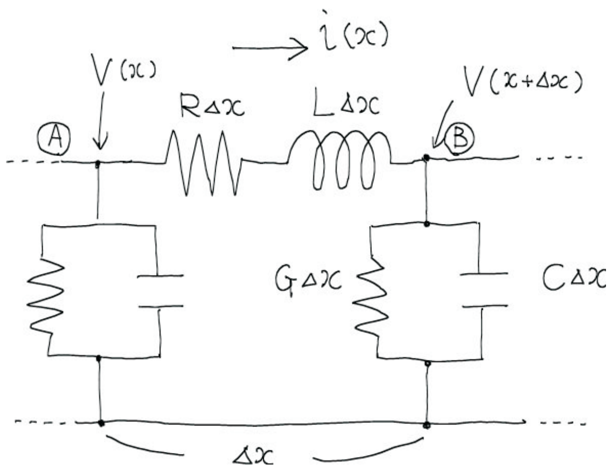

図 1: 1 次元分布定数系回路

$i(x)$: 位置 x の導線を流れる電流
$v(x)$: 位置 x での電圧

単位長さあたりの…

Z: インピーダンス
R: 抵抗
L: インダクタンス
Y: アドミッタンス
C: キャパシタンス
G: コンダクタンス

2.1 電信方程式

A-B 間の電圧則より、

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x+\Delta x) - v(x) \quad (1)\\ &= -R\Delta x\ i(x) - L\Delta x\ \frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (2)\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -Ri(x) - L\frac{\partial i(x)}{\partial t} \quad (3)$$

同様に A の電流則から、

$$\begin{aligned}\Delta i &= i(x) - i(x-\Delta x) \quad (4)\\ &= -G\Delta x\ v(x) - C\Delta x\ \frac{\partial v(x)}{\partial t} \quad (5)\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -Gv(x) - C\frac{\partial v(x)}{\partial t} \quad (6)$$

式 (3)(6) の $\Delta x \to 0$ の極限を取れば、

$$\begin{aligned}-\frac{\partial v}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}\\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gv + C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (7)\end{aligned}$$

が得られる。この 2 式は電信 (伝送) 方程式と呼ばれる。

片方の式を x で、もう片方の式を t でそれぞれ偏微分し、まとめることを考えると…

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial t} \quad (8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial i}{\partial x} = G\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (9)$$

より、$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial i}{\partial t}$ を代入して、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC+LG)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv \quad (10)$$

対称性から、電流に関しても同じ式が得られる。これは双曲型と呼ばれる 2 階の 2 変数偏微分方程式である。

2.2 正弦波交流、定常解を仮定した場合

正弦波交流、定常解を仮定した場合を考える。

$$\tilde{v} = V\exp(\mathrm{j}\omega t), \tilde{i} = I\exp(\mathrm{j}\omega t) \quad (11)$$

これを式 (7) に代入すると…

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = (R+\mathrm{j}\omega L)I \quad (12)$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = (G+\mathrm{j}\omega C)V \quad (13)$$

ここで $Z = R{+}\mathrm{j}\omega L$(インピーダンス), $Y = G{+}\mathrm{j}\omega C$(アドミッタンス) とおく。この両式を x で微分すると、

$$-\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -Z\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = ZYV \quad (14)$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}x^2} = YZI \quad (15)$$

この 2 式は同一と見てよい。

$\gamma^2 = ZY$ とおく。このとき γ を伝搬定数と呼ぶ。一般解は $V = A\mathrm{e}^{\alpha x}$ とおくと、$\alpha^2 = \gamma^2$ より、$\alpha = \pm\gamma$ なので、この 2 つの解の線形和で表されるから、

$$V = V_1\mathrm{e}^{-\gamma x} + V_2\mathrm{e}^{+\gamma x} \quad (16)$$

よって、$\tilde{v} = V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ に代入すれば解となる。

これを x で 1 階微分したものは、

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = V_1\gamma\mathrm{e}^{-\gamma x} - V_2\gamma\mathrm{e}^{+\gamma x} = ZI \tag{17}$$

の関係があるので Z で割ると、

$$I = \frac{V_1\gamma}{Z}\mathrm{e}^{-\gamma x} - \frac{V_2\gamma}{Z}\mathrm{e}^{+\gamma x} \tag{18}$$

と表される。

単純のために損失が無い場合を考える。すなわち、$R = G = 0$ の場合である。$\gamma^2 = ZY$ であったから、

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{LC} \tag{19}$$

と書ける。つまり (18) 式は

$$I = \frac{V_1\gamma}{Z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}x} - \frac{V_2\gamma}{Z}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}x} \tag{20}$$

という形で表される。これは、第 1 項が x の正方向へ伝搬する波動を、第 2 項が負方向へ伝搬する波動をそれぞれ表す。

ここで、無限の長さをもつ伝送路を考える。その場合には、無限遠からの反射波の成分は考慮しなくて良いので、第 2 項を無視することが出来て、

$$I = \frac{V_1\gamma}{Z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}x} \tag{21}$$

このとき、電圧と電流の比を考えると、

$$\frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{22}$$

となる。これは、位置 x や周波数 ω に依らない一定の値である。つまり、無限の長さを持ち、損失の無い伝送線路上においては、任意の位置で電圧と電流の比率が一定の実数になることを意味する。これが**特性インピーダンス**と呼ばれる量である。

ここで注意しなければならないのは、反射波が生じている場合には、この電圧と電流の比率が一定という関係は成立しないという点である。逆に言うと、反射波が生じない状況であれば、伝送線路の長さに依らず、特性インピーダンスと同じ値を持つ純抵抗を接続したかのように、みなすことが出来る。

では、有限長の線路において、反射波を生じない状況はどのようにしたら作り出せるか？ というと、無限に線路が繋がっているかのようにみなせればよいので、結局は、線路の端部に特性インピーダンスと同じ値の純抵抗を接続すればよいことが分かる。

このことはすなわち、本来は長さによって特性の変わりうる伝送線路に対し、特性インピーダンスと同じ値を持つ負荷を接続した場合には、伝送線路自体の特性は考えなくても良くなる。というようにも言うことが出来る。

ここで、注意すべきは、今扱っている L と C からなる伝送線路においては、どこにも電力を消費する素子が入っていないということである。実際、電信方程式を解いた結果である (20) 式に含まれるのは、波動を表す成分のみであり、減衰を生じる項はない。実数のインピーダンスというと、そこで電力が消費されるようなイメージがあるが、それを意味するパラメータではない。

個人的な見解としては、伝送路の特性を表現するパラメータが、偶然にも抵抗と同じ次元の物理量であったというくらいの捉え方の方が分かりやすいかもしれない、と思う。

2.3　損失のある場合の表現

前節では、損失を無視して議論を進めたが、ここでは損失まで考慮に入れて議論する。特性インピーダンス Z_0 は、単位長さあたりのインピーダンスとアドミタンスの比率の平方根であったから、

$$Z_0 = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}} \tag{23}$$

のように定義される。これが損失まで考慮に入れた特性インピーダンスの表現である。

ここで、直列抵抗 R の効果のみが大きく、G は無視できる程度の場合を考える。このとき、特性インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} - \mathrm{j}\frac{R}{\omega C}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{C}}(1 - \mathrm{j}\frac{R}{2\omega L}) \end{aligned} \tag{24}$$

となる。つまり、特性インピーダンスに虚部が現れることになる。

(注ここから私見。多分正しいと思うけれど)

これが意味するところは、電流と電圧の位相に関して、位相回転が生じるということである。すなわち、LC の梯子回路でモデル化されていた場合には電流と電圧の比率は位置に依らず一定であったのに対し、抵

抗を考慮した場合には、位置に依存して電流と電圧の位相がずれることになる。このずれた位相の分は、抵抗で消費され損失されるエネルギーに対応する。

一般的なインピーダンスの場合には、電力が消費されるのは抵抗、すなわちインピーダンスの実部であり、虚部は電力が消費されないコイルやコンデンサを意味していたが、特性インピーダンスの場合にはそうならない。つまり、実部が伝送線路に存在する信号のエネルギーに対応し、虚部が伝送線路で消費されるエネルギーに対応する。

(ここまで)

なお、一般的に特性インピーダンスと言った場合には、損失は考慮せず、理想的な実数値である $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ の方を指す場合が多い。つまり、実用的には $\frac{R}{2\omega L}$ が十分 1 より小さいため、位相の回転をほとんど考える必要が無いということである。

ついでに伝搬定数 γ も求めてみる。今インダクタンス成分 L、キャパシタンス成分 C に対して、十分 R,G が小さいと仮定する。すなわち、$\frac{R}{L\omega}, \frac{G}{C\omega} \ll 1$ と仮定する。伝搬定数 γ は $\gamma = \sqrt{ZY}$ なので、

$$\begin{aligned}\gamma &= \{(R + \mathrm{j}\omega L)\cdot(G + \mathrm{j}\omega C)\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{RG - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega(RC + LG)\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (-LC\omega^2)^{\frac{1}{2}}\{1 - \frac{RG}{LC\omega^2} - \mathrm{j}(\frac{G}{C\omega} + \frac{R}{L\omega})\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{25}$$

ここで仮定より $\frac{R}{L\omega}, \frac{G}{C\omega} \ll 1$ なので、それの積である第 2 項を無視してもよい。また、高周波帯では $\frac{R}{L\omega} \gg \frac{G}{C\omega}$ という近似が成り立つことが多いので、第 3 項も無視する。結局上式は、

$$\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}(1 - \frac{\mathrm{j}}{2}\frac{R}{L\omega}) \tag{26}$$

と表される。伝搬定数 γ を $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ のように実部と虚部とに分けて表現すると、一般解で γ が exp の肩に乗っていたことを考えれば、虚部が振動成分を表現し、実部がその包絡を表現することがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}\alpha &= \tfrac{R}{2}\sqrt{\tfrac{C}{L}} &&:\text{減衰定数} \\ \beta &= \omega\sqrt{LC} &&:\text{位相定数}\end{aligned}$$

よって、$v = V_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)}\mathrm{e}^{-\alpha x} + V_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)}\mathrm{e}^{\alpha x}$ と書ける。ここで、$\mathrm{e}^{\pm\alpha x}$ は減衰項を表し、$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t \pm \beta x)}$ は x の正負の方向に伝搬する波を表す。

参考文献

[1] 石川先生の授業ノート.

[2] 尾崎 弘: “大学課程電気回路 (2),” オーム社, 1968.

[3] 広畑 敦: “高周波技術センスアップ 101,” CQ 出版社, 2003.

その他ウェブサイト多数。主に以下。

http://www.mogami-wire.co.jp/paper/tline/tline-01.html