弾性体の基礎

牧野 泰才

平成 20 年 10 月 21 日

1 はじめに

指先などに力を加えた際に、どのような変形が生じるかを議論するためには、弾性体の変形に対する記述法を知っていなければならない。本稿では弾性体の変形を記述する基本的な変数を紹介し、それらの間の関係を示す。

弾性体とは、力を加えることで変形が生じた際に、それを元の形に戻そうという復元力がはたらく物体のことである。この復元力には、並進・回転は関係しない。すなわち、消しゴムを A 地点から B 地点へと移動させても、A 地点へ戻ろうとする力は生じないし、その場で回転させても、逆回転して元に戻ろうとはしない。弾性体の挙動を記述するためには、並進・回転に依らないパラメータを利用する必要がある。

2 歪み

2.1 歪みテンソル

並進・回転の場合には、弾性体内の任意の 2 点間の距離は変化しないはずである。逆に変形が生じた場合には、必ずそれが変化する。

適当な 2 点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ とする。変位ベクトルを位置の関数として $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ と書くことにすれば、変形によって物体の各点は

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

となるから、2 点間の距離の二乗は

$$(dl)^2 = (\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r_2}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r_1}))^2 \tag{2}$$

で与えられる。

今 $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ として、微小な距離 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 離れた 2 点、$\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を考えると、変形後のベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、添え字は 1, 2, 3 であり、それぞれ x, y, z 座標を表すことにする。また、同じ添え字が現れるときには、1, 2, 3 について和をとることにする。

式 (2) の値を計算すると、

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}l')^2 &= (\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j)(\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k) \\ &\simeq \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k & (4) \\ &= (dl)^2 + 2\epsilon_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j & (5) \end{aligned}$$

となる。なお $\partial u_i/\partial x_j$ の 2 次の項は微小であるとして無視をした。ここで、ϵ_{ij} は、

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{6}$$

であり、**歪みテンソル** と呼ばれる。

他の教科書等の記法に倣い、分かりやすさのために x_i を (x, y, z) に戻し、また u_iを (u, v, w) として行列形式で書き下せば、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{7}$$

2.2 垂直歪み

歪みテンソルが何を意味しているのかを考えるために、互いに直交するベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x_1} = (\mathrm{d}x_1, 0, 0)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{x_2} = (0, \mathrm{d}x_2, 0)$,$\mathrm{d}\boldsymbol{x_3} = (0, 0, \mathrm{d}x_3)$ を 3 辺に持つような微小直方体を考える。

まず $\epsilon_{11} \neq 0$ で、残りの $\epsilon_{ij} = 0$ とする。このとき、(3) 式より、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x'_1} = ((1 + \epsilon_{11})\mathrm{d}x_1, 0, 0) \tag{8}$$

であり、これは x 方向の長さのみが $1 + \epsilon_{11}$ 倍になったことを示す。$\epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ も同様であり、微小直方体の各面に垂直な方向への伸縮率を表す。このような歪みを**垂直歪み**と呼ぶ。

$$\epsilon_{11} = \frac{\mathrm{d}x'_1 - \mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1} \tag{9}$$

と表すことも出来る。元の長さ $\mathrm{d}x_1$ に対して、何割長さが変化したのかを表している、ということが分かりやすい。

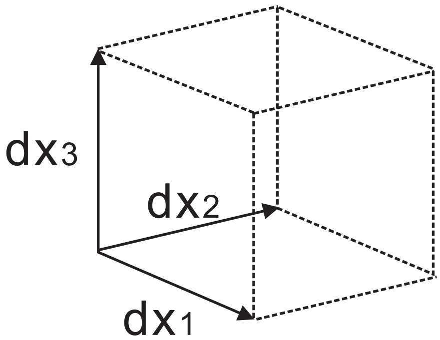

図 1: 微小直方体

2.3 体積変化率

各辺が $1 + \epsilon_{11}, 1 + \epsilon_{22}, 1 + \epsilon_{33}$ 伸縮したとする。このとき、微小直方体の体積はどれくらい変化するか? 伸縮する前の体積は、

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{10}$$

であるのに対して、伸縮後の体積は、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V' &= (1+\epsilon_{11})\mathrm{d}x_1(1+\epsilon_{22})\mathrm{d}x_2(1+\epsilon_{33})\mathrm{d}x_3 \\ &= (1+\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33})\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{11}$$

なお、微小量である ϵ の 2 次以上の項は無視した。したがって、体積変化率は

$$\frac{\mathrm{d}V'-\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33} \tag{12}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{13}$$

$$= \mathrm{div}\boldsymbol{u} \tag{14}$$

である。

歪みテンソル自体は、座標系の取り方に依存して各成分の値を変えるが、同じ変形に対する微小直方体の体積変化は、座標の取り方には依存しないはずである。実際、この $\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ は、座標の取り方に依らず常に一定の値をとる。なぜなら、歪みテンソルのトレースは、固有方程式の係数となるからである。

2.4 せん断歪み

非対角成分は何を表しているのか。そこで $\epsilon_{12}=\epsilon_{21}\neq 0$、残りの $\epsilon_{ij}=0$ として変形を考えてみる。回転はしないとして $\partial u_1/\partial x_2=\partial u_2/\partial x_1$ として考えると、(3) 式を計算すれば、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x_1}' = (\mathrm{d}x_1, \epsilon_{21}\mathrm{d}x_1, 0) \tag{15}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x_2}' = (\epsilon_{12}\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_2, 0) \tag{16}$$

である。

このとき、$\mathrm{d}\boldsymbol{x_i}$ の長さの変化は、図 2 より

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1'-\mathrm{d}x_1 &= \epsilon_{21}\mathrm{d}x_1\sin\theta \\ &\sim \epsilon_{21}\mathrm{d}x_1\theta \\ &\sim \epsilon_{21}\mathrm{d}x_1\epsilon_{21} = \epsilon_{21}^2\mathrm{d}x_1 \end{aligned} \tag{17}$$

したがって、歪みの 2 次以上の項を無視すれば、長さの変化は無い。

一方角度 θ は

$$\theta \sim \tan\theta = \epsilon_{21} \tag{18}$$

である。したがって、$\mathrm{d}x_1$ と $\mathrm{d}x_2$ がなす角度は、$\pi/2$ から $2\epsilon_{21}$ だけ変化する。このとき体積は変化しない。このような歪みを、**せん断歪み**と呼ぶ。γ を使って、γ_{xy} のように表されることが多い。

3 主歪み

体積変化率の所でも少し触れたが、歪みテンソルの固有方程式は座標の取り方に依存しない。当然、固有値も変化せず、それに対応した固有ベクトルをとることができる。その結果、歪みテンソルを対角化することができる。非対角成分がすべて 0 になるので、垂直歪みのみが存在する。このときの垂直歪みの軸を主軸、各成分を主歪みと呼ぶ。主歪みの大きさは、固有値に対応する。

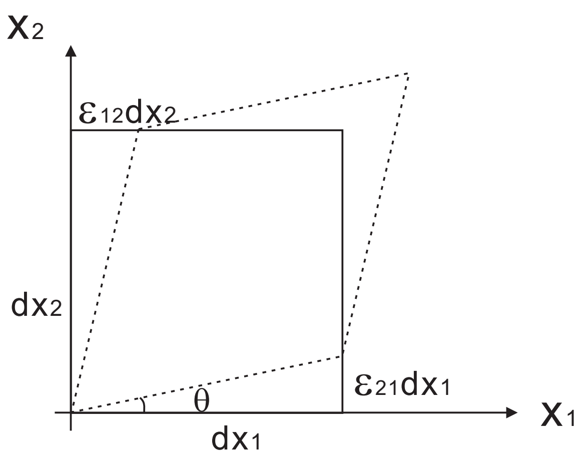

図 2: せん断歪み時の変形

このことからも、座標系を規定しない限り、歪みテンソルの成分が決定しないことがわかる。例えば「指先にピンを押し当てた際に生じるせん断歪みをシミュレーション結果として表示した」という表現では情報が足りない。「指先表面に沿って、指の伸びている方向に x 軸、それと直行する方向に y 軸、指の内側に向かう方向に z 軸をとった座標系において、指先にピンを押し当てた…」というように、座標系を指定しなければならない。

4　歪みテンソルの分解

歪みテンソルを多面的に理解するために、これまでの議論とは関係なく、3 次元の変形を表す以下のようなテンソルを考える。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{19}$$

このようなテンソルを、流体力学の分野では**相対変位テンソル**と呼ぶ (らしい)。

このテンソルにおいて、トレースが 0 では無いテンソルと、トレースが 0 になるテンソルとに分解する。

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z} & 3\frac{\partial u}{\partial y} & 3\frac{\partial u}{\partial z} \\ 3\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z} & 3\frac{\partial v}{\partial z} \\ 3\frac{\partial w}{\partial x} & 3\frac{\partial w}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{20}$$

歪みテンソルのトレースは変位ベクトルの div であり、等方的な変形を表現することから、この第 1 項目が等方的な歪み (膨張・圧縮) を表すテンソルになる。

更に 2 項目を以下のように変形する。

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z} & \frac{3}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{3}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{3}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & -\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z} & \frac{3}{2}(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{3}{2}(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{3}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & -\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

式 (21) の第 2 項目が、回転を表すテンソルになっており、歪みテンソルはこの回転のテンソルが差し引かれたものとなっている。逆に言うと、弾性体の変形においては、回転のテンソルが 0 となる条件を考えていることに

なるため、

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{24}$$

である。

一方、式 (21) の第 1 項は、体積が変動せず、かつ回転も生じないような変形になっている。したがって、(20) 式の第 1 項と (21) 式の第 1 項との和が、先ほど定義した歪みテンソルになっている。なお、体積不変の変形が、すなわちせん断変形かというとそうではない。(21) 式の第 1 項も更に対角成分のみを持つテンソルと、非対角成分のみを持つテンソルとに分解すると、変形の様子が理解しやすい。

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

対角成分のみを持つテンソルは、面に垂直な方向に押された分だけ、違う面の方向に垂直に膨らみが生じる (あるいはその逆) という変形を表す。その結果体積変化は生じない。それに対して、非対角成分のみを持つテンソルは、まさしくせん断歪みを表す形になっていることが分かる。先ほどの式 (23),(24),(24) 式より、せん断歪みの成分は 6 つあるが、その自由度は半分の 3 であることも分かる。

以上まとめると、

$$\begin{aligned} \text{変形} &= \text{歪みテンソル} + \text{回転} \\ &= \text{現在の座標系の軸に沿った変形} + \text{せん断変形} + \text{回転} \\ &= \text{等方的な膨張・圧縮} + \text{体積不変の垂直変形} + \text{せん断変形} + \text{回転} \end{aligned}$$

5 応力

5.1 ラメの弾性定数

ある微小面に対して垂直に作用する単位面積あたりの力を応力という。応力がはたらいていないときには歪みが 0 であると考えれば、応力と歪みは比例関係にあると考えるのがもっともらしい。そこで、歪みテンソルの 6 つの独立成分 (垂直歪み 3 成分+せん断歪み 3 成分) とそれに対応した 6 つの独立な応力成分 (垂直応力 3 成分+せん断応力 3 成分) との間に、以下のような関係があると仮定する。なお、応力は σ を使って σ_{xx} のように表されることが多い。また、せん断応力は τ_{xy} のように表されることもある。(今回はどちらも σ で表記)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{26}$$

比例定数 C_{ij} は、結晶構造を持たず、等方的な場合のときにその自由度が最小の 2 となる。このときの 2 つの比例定数は**ラメの弾性定数**と呼ばれ、λ, μ を用いて以下のように書き表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{27}$$

体積膨張率 $\Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ を使って各成分ごとに書き出すと、

$$\sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_x, \quad \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_y, \quad \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_z \tag{28}$$

$$\sigma_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \quad \sigma_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \quad \sigma_{zx} = \mu\gamma_{zx}, \tag{29}$$

μ はせん断変形とせん断応力との間の比例定数として現れる。この μ を**剛性率 (ずり弾性率・横弾性係数・せん断弾性係数)** などと呼ぶ。

5.2　一様圧縮

静止した水の中に物体を沈めた場合を考える。このとき各面には一様の垂直応力 p が加わる。このときつり合いの式を満たすためには、応力テンソルは

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{30}$$

であれば良い。この場合、せん断応力が 0 なので、0 でない各歪みテンソル成分は、

$$\begin{aligned} -p &= \sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_x \\ -p &= \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_y \\ -p &= \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_z \end{aligned} \tag{31}$$

この 3 式を加えると、

$$\begin{aligned} -3p &= 3\lambda\Theta + 2\mu(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \\ p &= -(\lambda + \frac{2}{3}\mu)\Theta \end{aligned} \tag{32}$$

ここで Θ 体積膨張率を表したことを思い出せば、この式は水圧によって体積が圧縮されることを表しており、そのときの水圧と体積変化の比例定数は

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{33}$$

で与えられる。この K は**体積弾性率** と呼ばれる。

5.3　一様引っ張り

直方体の x 方向断面に対してのみ、圧力 p で引っ張る方向に力が働いている場合を考える。このとき、つり合いの関係から、

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

であれば良い。この場合もせん断応力が 0 なので、垂直応力のみ考えると、

$$\begin{aligned} p &= \sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_x \\ 0 &= \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_y \\ 0 &= \sigma_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu\epsilon_z \end{aligned} \tag{35}$$

この式より明らかに $\epsilon_y = \epsilon_z$ であるから、各方向の伸び率は

$$\epsilon_x = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} p \tag{36}$$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu))} p \tag{37}$$

長さ方向の応力 p と垂直歪み ϵ_x の比は

$$E = \frac{p}{\epsilon_x} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{38}$$

で与えられ、**ヤング率 (縦弾性係数)** と呼ばれる。

また、y 方向の縮み率 $-\epsilon_y$ を x 方向の伸び率 ϵ_x との比で表した

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{39}$$

は**ポアソン比**と呼ばれる。

等方的な弾性体の変形を表すパラメータの自由度は 2 であることから、上記のラメの弾性定数 λ, μ, 体積弾性率 K, ヤング率 E, ポアソン比 ν の中から任意の 2 つを選ぶことで、全て他の定数を決定することが可能になる。例えば、体積弾性率とラメの弾性定数を使ってヤング率とポアソン比を書き直すと、

$$E = \frac{9\mu K}{\mu + 3K} \tag{40}$$

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(\mu + 3K)} \tag{41}$$

参考文献

[1] 恒藤 敏彦: “弾性体と流体,” 岩波書店, 1983

[2] 神部 勉: “流体力学,” 裳華房, 1995.

[3] http://www12.plala.or.jp/ksp/vectoranalysis/index.html