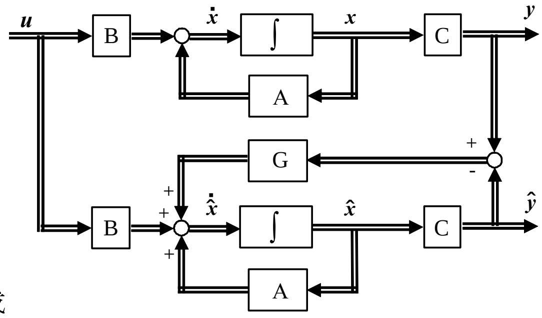
10. 最小次元状態観測器

（学習内容）

・*最小次元状態観測器の考え方を理解する*

・*最小次元状態観測器の設計方法を学ぶ*

10.1 最小次元状態観測器の考え方



$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

n 次元状態観測器

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + G\{(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)\}\\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{cases}$$

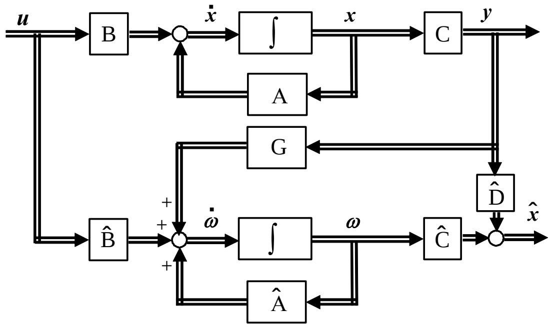
元の n 次のシステムに対して n 次の状態観測器を構成

→　できるだけ次数の低いモデルで状態観測器を構成したい

・最小次元状態観測器

　　状態変数の一部は出力 **y** から測定できる

　　一次独立な l 個の出力を用いて(n−l)次の観測器を構成する



$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{\omega}(t) + \hat{B}\boldsymbol{u}(t) + G\boldsymbol{y}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{C}\boldsymbol{\omega}(t) + \hat{D}\boldsymbol{y}(t)\end{cases}$$

$\hat{A}\,(n-l \times n-l),\quad \hat{B}\,(n-l \times m),\quad G\,(n-l \times l)$

$\hat{C}\,(n \times n-l),\quad \hat{D}\,(n \times l)$

ここで、任意の行列 F（n−l×n）に対して

$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) - F\boldsymbol{x}(t)$

を考える

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) - F\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{\omega}(t) + \hat{B}\boldsymbol{u}(t) + GC\boldsymbol{x}(t) - F\{A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)\} = \hat{A}\boldsymbol{\omega}(t) - (FA - GC)\boldsymbol{x}(t) + (\hat{B} - FB)\boldsymbol{u}(t)$$

よって

$\mathrm{FA} - \mathrm{GC} = \hat{\mathrm{A}}\mathrm{F}$

$\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{FB}$

が成立すれば、

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{\omega}(t) - \hat{A}F\boldsymbol{x}(t) = \hat{A}\{\boldsymbol{\omega}(t) - F\boldsymbol{x}(t)\} = \hat{A}\boldsymbol{\varepsilon}(t)$

$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = e^{\hat{A}t}\boldsymbol{\varepsilon}(0)$

よって $\hat{\mathrm{A}}$ が安定行列であれば、

$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0$

となり、$\boldsymbol{\omega}$(t) は F$\boldsymbol{x}$(t) の推定値となる

次に $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ が $\boldsymbol{x}(t)$ の推定値になるか考える

$\boldsymbol{\delta}(t)=\hat{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}(t)=\{\hat{C}\boldsymbol{\omega}(t)+\hat{D}C\mathbf{x}(t)\}-\mathbf{x}(t)=\hat{C}\boldsymbol{\omega}(t)-(I_n-\hat{D}C)\mathbf{x}(t)$

ここで

$I_n-\hat{D}C=\hat{C}F$

が成立すれば

$\boldsymbol{\delta}(t)=\hat{C}\boldsymbol{\omega}(t)-\hat{C}F\mathbf{x}(t)=\hat{C}\{\boldsymbol{\omega}(t)-F\mathbf{x}(t)\}=\hat{C}\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\hat{C}e^{\hat{A}t}\boldsymbol{\varepsilon}_0$

よって $\hat{A}$ が安定行列であれば、

$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\delta}(t)=0$

となり、$\hat{\mathbf{x}}(t)$ は x(t) の推定値となる

・最小次元状態観測器の構成条件

可観測なシステム

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

に対して

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)=\hat{A}\boldsymbol{\omega}(t)+\hat{B}\mathbf{u}(t)+G\mathbf{y}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)=\hat{C}\boldsymbol{\omega}(t)+\hat{D}\mathbf{y}(t)\end{cases}$$

が最小次元状態観測器になるためには

$\hat{A}$ が安定行列 …①

$FA-GC=\hat{A}F$ …②

$\hat{B}=FB$ …③

$I_n-\hat{D}C=\hat{C}F$ …④

を満足することである

10.2 最小次元観測器の設計法

最小次元状態観測器の $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, G をどのように決定するか

・ゴピナスの方法

$\hat{A}$ が固有値 r1, r2, … の最小次元状態観測器を設計する

1) 元のシステムの可観測性を調べる

2) 任意の行列 M(n-1×n)により正則行列 T(n×n)を作る

$$T=\begin{bmatrix}C\\M\end{bmatrix} \quad \cdots⑤$$

3) A, B を次のように定める

$$\overline{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix} \quad \cdots⑥$$

$$\overline{B}=TB=\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix} \quad \cdots⑦$$

4) 設計パラメータ L(n-1×1)を用いて

$\hat{A} = \overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12} \qquad (n-l \times n-l) \qquad \cdots$⑧

と表す。

L によって $\hat{\mathrm{A}}$ の固有値を任意に設定できる。

特性方程式

$|\mathrm{sI} - \hat{\mathrm{A}}| = |\mathrm{sI} - \overline{\mathrm{A}}_{22} + \mathrm{L}\overline{\mathrm{A}}_{12}| = 0$

が　r1, r2, ⋯ の固有値を持つように係数比較によって L を決定できる。

5）L を用いて以下の係数行列を定める

$\hat{B} = -L\overline{B}_1 + \overline{B}_2 \qquad (n-l \times m) \qquad \cdots$⑨

$G = \hat{A}L + \overline{A}_{21} - L\overline{A}_{11} \qquad (n-l \times l) \qquad \cdots$⑩

$\hat{C} = T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-l} \end{bmatrix} \qquad (n \times n-l) \qquad \cdots$⑪

$\hat{D} = T^{-1}\begin{bmatrix} I_l \\ L \end{bmatrix} \qquad (n \times l) \qquad \cdots$⑫

これらの係数行列で設計されたシステムは

$F = \begin{bmatrix} -L & I_{n-l} \end{bmatrix} T \qquad (n-l \times n) \qquad \cdots$⑬

とすることで、状態観測器の構成条件を満たす。

（証明）

・ $\mathrm{FA} - \mathrm{GC} = \hat{\mathrm{A}}\mathrm{F}$ について

$\mathrm{FAT}^{-1} - \mathrm{GCT}^{-1} = \hat{\mathrm{A}}\mathrm{FT}^{-1}$ 　を示すことを考える

準備：

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix} = C$$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots ⑭$$

$$左辺 = FT^{-1}TAT^{-1} - GCT^{-1}$$

$$= \underset{⑬}{\begin{bmatrix} -L & I_{n-1} \end{bmatrix}} TAT^{-1} - GCT^{-1} = \begin{bmatrix} -L & I_{n-l} \end{bmatrix} \underset{⑥}{\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}} - \underset{⑩}{\left(\hat{A}L + \overline{A}_{21} - L\overline{A}_{11}\right)} \underset{⑭}{\begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -L\overline{A}_{11} + \overline{A}_{21} & -L\overline{A}_{12} + \overline{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{A}L + \overline{A}_{21} - L\overline{A}_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\hat{A}L & -L\overline{A}_{12} + \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \underset{⑧}{=} \begin{bmatrix} -\hat{A}L & \hat{A} \end{bmatrix}$$

$$右辺 = \hat{A}FT^{-1} = \hat{A}\underset{⑬}{\begin{bmatrix} -L & I_{n-l} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -\hat{A}L & \hat{A} \end{bmatrix}$$

・ $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{FB}$ 　について

$$右辺 = FT^{-1}TB$$

$$= \underset{⑬}{\begin{bmatrix} -L & I_{n-l} \end{bmatrix}} \underset{⑦}{\begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix}} = -L\overline{B}_1 + \overline{B}_2 \underset{⑨}{=} \hat{B} = 左辺$$

・ $I_n - \hat{D}C = \hat{C}F$　について

$TI_nT^{-1} - T\hat{D}CT^{-1} = T\hat{C}FT^{-1}$　を示すことを考える

$$\text{左辺} = TT^{-1}TT^{-1} - T\hat{D}CT^{-1} = I_n - T\hat{D}CT^{-1}$$

$$= I_n - \underset{⑫}{\begin{bmatrix} I_l \\ L \end{bmatrix}} \underset{⑭}{\begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ LI_l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & I_{n-l} \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = T\hat{C}FT^{-1}$$

$$= \underset{⑪}{\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-l} \end{bmatrix}} \underset{⑬}{\begin{bmatrix} -L & I_{n-l} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & I_{n-l} \end{bmatrix}$$

・　$\hat{A}$ は安定行列

（例題）

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

において、$x=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]$　とすると　$y=x_3$　だけが測定可能である。

固有値を $r_1=-7$, $r_2=-8$ とする最小次元状態観測器を設計せよ。

（解）

1）可観測性

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \mathbf{c}^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rank N=3 となり、可観測。最小次元状態観測器を作ることができる。

2）C=[0 0 1] より

$$T = \begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく。T は正則行列　（$|T|=-1\neq 0$）

3）

$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4）固有値 −7, −8 より

$$\hat{A} = \overline{A}_{22} - L\overline{A}_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-L_1 & 1 \\ 2-L_2 & -1 \end{bmatrix}$$

よって

$$|sI - \hat{A}| = s^2 + (3+L_1)s + L_1 + L_2$$

一方、希望固有値に対する特性方程式は

$(s+7)(s+8)=s^2+15s+56$

係数比較により　$L_1=12$,　$L_2=44$

よって

$$L = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -42 & -1 \end{bmatrix}$$

5)観測器の係数は

$$\hat{B} = -L\overline{B}_1 + \overline{B}_2 = -\begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -44 \end{bmatrix}$$

$$G = \hat{A}L + \overline{A}_{21} - LA_{11} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -42 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -135 \\ -592 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = T^{-1}\begin{bmatrix} I_1 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以上より 2 次元状態観測器は

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \hat{A}\boldsymbol{\omega} + \hat{B}u + Gy = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -42 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} -11 \\ -44 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} -135 \\ -592 \end{bmatrix}y$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{C}\boldsymbol{\omega} + \hat{D}y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} 44 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}y$$