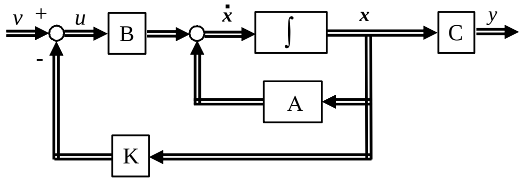
11. 最適レギュレータ

（学習内容）

・評価関数の考え方を理解する

・最適レギュレータの設計方法を学ぶ



11.1 評価関数

状態フィードバック

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - BK)\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{v}(t)$

固有値をどう配置したらいいか、

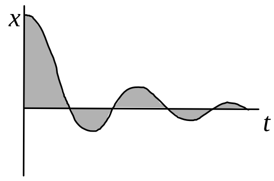
多入力系では固有値を与えてもＫが唯一に決定できないがどう選んだらいいか

→　評価指標を与え最適な制御系を設計する　最適制御

レギュレータ：状態変数が平衡状態からずれたときにフィードバックによって漸近的に平衡状態に戻し安定化する仕組み

最適レギュレータに対する評価関数

可制御なシステム



$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{u}$　　　A(n×n),　B(n×m)

に対して評価関数を考える

$J = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}\}dt$

Q(n×n),R(m×m)：重み行列

Q は非負定（Q≧0）、R は正定（R＞0）の対称行列

評価関数 J を最小にする状態フィードバックを考える

正定：x≠0 の x に対し $x^T Qx > 0$

負定：x≠0 の x に対し $x^T Qx < 0$

$\int_0^\infty \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}\, dt$

を小さくすることは x(t)を速やかに収束させる、速応性

$\int_0^\infty \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}\, dt$

を小さくすることは制御に必要なエネルギーを小さくする

消費エネルギーを小さくし、かつ過渡特性をよくする制御法

11.2 最適制御入力

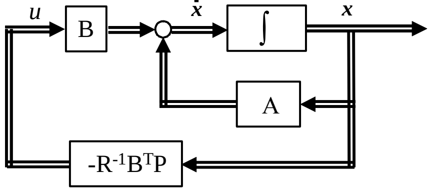
可制御なシステム

$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$　　　　　・・・①

に対して評価関数 J を最小にする最適フィードバック制御入力は

$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} = -R^{-1}B^T P\boldsymbol{x}$　　　・・・②

となる



ここでＰは n×n の対称行列で、次のリカッチ行列方程式の唯一の正定解である

$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$　　　・・・③

このとき J の最小値は

$\min J = \boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)$　　　　　・・・④

（証明）

$$J = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}\}dt = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T \overset{\text{③}}{(PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}\}dt$$

$$= \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T PA\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T A^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}\}dt$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{P}\dot{\mathbf{x}} = \overset{\text{①}}{(\mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{u})^\mathrm{T}}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{P}\overset{\text{①}}{(\mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{u})}$$

$$= \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{PA}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{PB}\mathbf{u}$$

$$= \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{PA}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathrm{T}\mathrm{PB}\mathbf{u}$$

> 転置行列
>
> $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^\mathrm{T} = \mathrm{A}^\mathrm{T} + \mathrm{B}^\mathrm{T}$
>
> $(\mathrm{AB})^\mathrm{T} = \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{A}$
>
> $(\mathrm{A}^{-1})^\mathrm{T} = (\mathrm{A}^\mathrm{T})^{-1}$

これを代入

$$J = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{x} + u^T R\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}^T PB\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T B^T P\boldsymbol{x} - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x})\}dt$$

$$= \int_0^\infty \{\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}^T PBR^{-1}R\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T RR^{-1}B^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T PBR^{-1}RR^{-1}B^T P\boldsymbol{x}\}dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x})dt$$

$$= \int_0^\infty \{(\boldsymbol{u}^T + \boldsymbol{x}^T PBR^{-1})R(\boldsymbol{u} + R^{-1}B^T P\boldsymbol{x})\}dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x})dt$$

$$= \int_0^\infty \{(\boldsymbol{u} + R^{-1}B^T P\boldsymbol{x})^T R(\boldsymbol{u} + R^{-1}B^T P\boldsymbol{x})\}dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x})dt$$

ここで安定化されていることから、t→∞で $\boldsymbol{x}\to 0$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x})dt = \left[\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}\right]_0^\infty = \boldsymbol{x}^T(\infty)P\boldsymbol{x}(\infty) - \boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0) = -\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)$$

よって

$$J = \boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0) + \int_0^\infty \{(\boldsymbol{u} + R^{-1}B^T P\boldsymbol{x})^T R(\boldsymbol{u} + R^{-1}B^T P\boldsymbol{x})\}dt$$

R は正定値行列であるから積分内は　$\boldsymbol{u}+\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{P}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　つまり、$\boldsymbol{u}=-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{P}\boldsymbol{x}$　が成立するとき 0 となり J は最小になる。

最小値は　$\min \mathrm{J}=\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(0)\mathrm{P}\boldsymbol{x}(0)$

（例題）

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

に対して評価関数を

$$J = \int_0^\infty \{\boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + u^2\}dt \qquad Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

とした場合の最適レギュレータを設計せよ

（解）

元のシステムの固有値は

|sI-A|=s(s+3)+2=(s+1)(s+2)=0　より、s=-1,-2 となり安定なシステムである

対称行列

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{bmatrix}$$ とおくと、

$$\mathrm{A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0}$$ より

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{bmatrix}=0$$

これより

$$\begin{bmatrix}-4\mathrm{P}_{12}+5-\mathrm{P^2}_{12} & \mathrm{P}_{11}-3\mathrm{P}_{12}-2\mathrm{P}_{22}-\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{22}\\ \mathrm{P}_{11}-3\mathrm{P}_{12}-2\mathrm{P}_{22}-\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{22} & 2\mathrm{P}_{12}-6\mathrm{P}_{22}+5-\mathrm{P^2}_{22}\end{bmatrix}=0$$

よって

$$-4\mathrm{P}_{12}+5-\mathrm{P^2}_{12}=0$$

$$\mathrm{P}_{11}-3\mathrm{P}_{12}-2\mathrm{P}_{22}-\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{22}=0$$

$$2\mathrm{P}_{12}-6\mathrm{P}_{22}+5-\mathrm{P^2}_{22}=0$$

第１式より　P_{12}=-5，1

P_{12}=-5 の場合 P_{11}=0，P_{22}=-5 あるいは P_{11}=-12，P_{22}=-1

となりＰは正定とならない

P_{12}=1 の場合は P_{11}=6，P_{22}=1 ではＰが正定

P_{11}=-18，P_{22}=-7 は正定とならない

よって

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$u=-R^{-1}B^TP\boldsymbol{x}=-1\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=-\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=-x_1-x_2$$

これにより固有値は

$$|sI-(A-\boldsymbol{b}R^{-1}\boldsymbol{b}^TP)|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{vmatrix}=s(s+4)+3=(s+1)(s+3)=0$$

よって　s=-1,-3　となり負の値が大きくなり速応性を得る

シルベスタの判定条件

Ｑが正定となるためには

$$\mathrm{P}_{11}>0,\quad \begin{vmatrix}\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12}\\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22}\end{vmatrix}>0,\ldots\quad |Q|>0$$