12. サーボシステム

（学習内容）

・*サーボシステムの構成を理解する*

・*サーボシステムの設計法を学ぶ*

12.1 サーボシステムの構成

・レギュレータ：平衡点からずれた状態変数を元に戻す制御システム

・サーボシステム：システムの出力を目標入力に追従させる制御システム

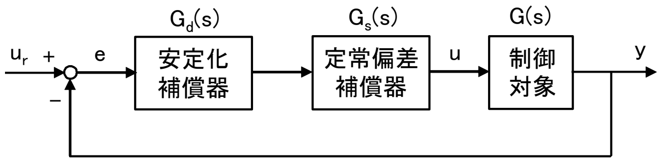
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

に対し、$u_r(t)$：目標入力、$y(t)$：追従出力

サーボシステムに要求される条件

・定常偏差がゼロあるいは小さくなること　→　$G_s(s)$：定常偏差補償器

・閉ループシステムが漸近安定であること　→　$G_d(s)$：安定化補償器



出力と目標入力との偏差　$e(t)=u_r(t)-y(t)$　を制御用信号とする

偏差 $e(t)$ のラプラス変換は

$$E(s) = U_r(s) - Y(s), \qquad Y(s) = G(s)E(s) \qquad \text{より} \quad (1+G(s))E(s) = U_r(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} U_r(s)$$

$$t^i \rightarrow \frac{i!}{s^{i+1}}$$

目標入力を

$$u_r^{\,i}(t) = \frac{a}{i!} t^i \qquad (t \geq 0)$$

とする。（$i=0$ の場合：$u(t)=a$ ステップ関数、$i=1$ の場合：$u(t)=at$ ランプ関数）

ラプラス変換すると

$$U_r^{\,i}(s) = \frac{a}{s^{i+1}}$$

よって、目標入力 $u_r^{\,i}(t)$ に対する偏差 $e^i(t)$ のラプラス変換は

$$E^i(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{a}{s^{i+1}}$$

最終値の定理より、定常偏差は

$$\lim_{t\to\infty} e^i(t) = \lim_{s\to 0} sE^i(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{a}{s^i} = \begin{cases} \dfrac{a}{1+K_0} & (i=0) \\ \dfrac{a}{K_i} & (i\geq 1) \end{cases}$$

ただし　$K_i = \lim_{s\to 0} s^i G(s)$

これより、K_i が大きいほど定常偏差 $e^i(\infty)$ を小さくすることができる

$$G(s) = \frac{N(s)}{s^l\ D(s)} \quad (N(0)\neq 0,\ D(0)\neq 0)$$

とすると、l の数によって定常偏差を分類できる。l のとき l 型伝達関数という。

G(s)が 0 型の場合：$K_0=N(0)/D(0)$　→　$e^0(\infty)=a/(1+K_0)$　一定の定常偏差
$K_1=0$　→　$e^1(\infty)=\infty$　追従せず
G(s)が 1 型の場合：$K_0=\infty$　→　$e^0(\infty)=0$　定常偏差なく追従　(0(l−1)次まで)
$K_1=N(0)/D(0)$　→　$e^1(\infty)=a/K_1$　一定の定常偏差
$K_2=0$　→　$e^2(\infty)=\infty$　追従せず
G(s)が 2 型の場合：$K_0=K_1=\infty$　→　$e^0(\infty)=e^1(\infty)=0$　定常偏差なく追従　(1(l−1)次まで)
$K_2=N(0)/D(0)$　→　$e^2(\infty)=a/K_2$　一定の定常偏差
$K_3=0$　→　$e^3(\infty)=\infty$　追従せず

このことから、G(s)の型数が大きいほど、高次の目標入力に定常偏差なしで追従できる
G(s)が目標入力より大きい型の伝達関数の場合は定常偏差が残らない
→$G_s(s)$ として複数個の積分器を用いることで、G(s)の型数を任意に大きくできる
　$G_d(s)$ は型数を減らさずに制御系を安定化させる

12.2 サーボシステムの設計法

可制御な系

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

・定常偏差補償器
与えられた制御対象の型数を求め、定常偏差なく目標入力に追従するために必要な積分器 1/s を付加する
・安定化補償器
定常偏差補償器を含めた系について、状態フィードバックや状態観測器によって安定化を図る

（具体例）
次式で与えられるサーボシステムを、ステップ入力に定常偏差なく追従するように設計する。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

（設計法）

伝達関数 G(s)を求めると

$$G(s) = \boldsymbol{c}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

このシステムは 0 型。

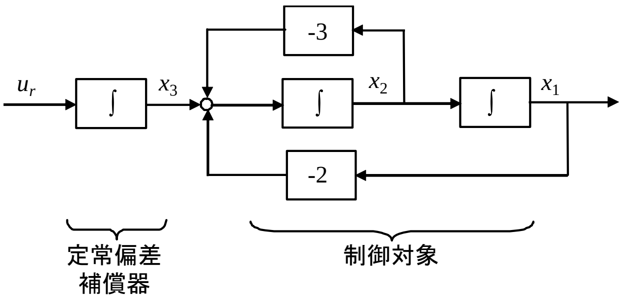
ステップ入力 u(t)=1 のラプラス変換は U(s)=1/s

$$\mathrm{E(s)} = \frac{1}{1+\mathrm{G(s)}}\mathrm{U(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)+1}\cdot\frac{1}{s} \qquad e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\mathrm{E(s)} = \frac{2}{3}$$

よって定常偏差が残る

定常偏差補償器としては、1/s を付加する

定常偏差補償器を含む系は



状態方程式は、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_r \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

定常偏差補償器を含む系を安定化させる

x_1, x_2, x_3 を測定可能とし、状態フィードバックにより固有値を例えば −4, −3±j3　に設定

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

|V|=−1≠0　rank V=3　より可制御

特性方程式は　$|sI-A|=s^3+3s^2+2s=0$　係数は $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$

よって、可制御標準系への変換行列 P は

$$P = V\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

状態フィードバック系の特性方程式は

$$s^3 + (3+\bar{k}_3)s^2 + (2+\bar{k}_2)s + \bar{k}_1 = 0$$

一方、希望固有値が −4, −3±j3 を持つ特性方程式は

$(s+4)(s+3-j3)(s+3+j3)=s^3+10s^2+42s+72=0$

よって

$\bar{k}_1 = 72, \quad \bar{k}_2 = 40, \quad \bar{k}_3 = 7$

これより状態フィードバック係数行列は

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\,\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 72 & 40 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 19 & 7 \end{bmatrix}$$