13. 離散値系制御

（学習内容）

・離散値系システムの状態方程式表現を理解する

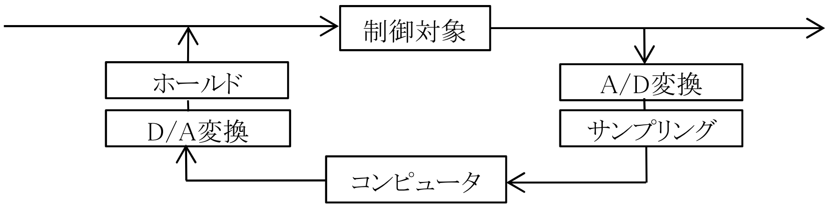
・離散値系システムの性質を理解する

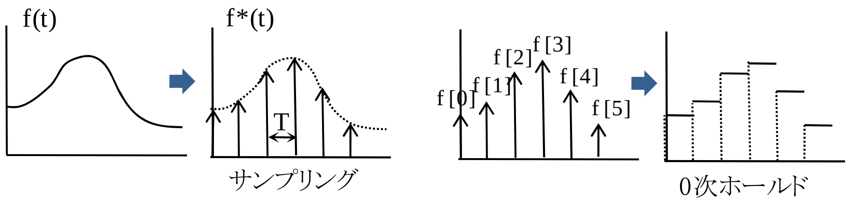
13.1 離散値系の状態方程式

コンピュータを用いるデジタル制御では、測定データや制御信号を一定の時間間隔の離散信号として取り扱う

・サンプリング：測定データから離散信号を取り出すこと

・ホールド：離散信号を連続信号に変換すること





離散値系の状態方程式は、次の差分方程式で表される。

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[k+1] = A_d \boldsymbol{x}[k] + B_d \boldsymbol{u}[k] \\ \boldsymbol{y}[k] = C_d \boldsymbol{x}[k] \end{cases}$$

ただし、$\boldsymbol{x}$[k]=$\boldsymbol{x}$(kT)，$\boldsymbol{y}$[k]=$\boldsymbol{y}$(kT)、$\boldsymbol{u}$[k]=$\boldsymbol{u}$(kT)、T はサンプリング周期

連続系の状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ y(t) = C\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

サンプリング周期を T とすると

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) = e^{A(k+1)T}\boldsymbol{x}_0 + e^{A(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{x}(kT) = e^{AkT}\boldsymbol{x}_0 + e^{AkT}\int_0^{kT} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

ここで入力を　$\boldsymbol{u}$(t)=$\boldsymbol{u}$(kT)=$\boldsymbol{u}$[k]=constant.　(kT≦t＜(k+1)T)　の 0 次ホールドで表すと

$$\boldsymbol{x}((k+1)T) - e^{AT}\boldsymbol{x}(kT) = e^{A(k+1)T}\left[\int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau - \int_0^{kT} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}((k+1)T) &= e^{AT}\boldsymbol{x}(kT) + e^{A(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}\boldsymbol{x}(kT) + e^{AT}\int_0^T e^{-At}B\boldsymbol{u}(kT)dt \qquad (t=\tau-kT,\quad \tau=t+kT,\quad u(t+kT)=u(kT)\ (0\le t<T)) \\ &= e^{AT}\boldsymbol{x}(kT) + \int_0^T e^{A\lambda}B\boldsymbol{u}(kT)d\lambda \qquad (\lambda = T-t)\end{aligned}$$

これより

$$\boldsymbol{x}[k+1] = e^{AT}\boldsymbol{x}[k] + (\int_0^T e^{A\lambda}d\lambda)B\,\boldsymbol{u}[k]$$

ここで

$$A_d = e^{AT},\quad B_d = (\int_0^T e^{A\lambda}d\lambda)B,\quad C_d = C$$

離散時間系の一般解は

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}[1] = A_d\boldsymbol{x}[0] + B_d\boldsymbol{u}[0] \\ &\boldsymbol{x}[2] = A_d\boldsymbol{x}[1] + B_d\boldsymbol{u}[1] = A_d^{\,2}\boldsymbol{x}[0] + A_dB_d\boldsymbol{u}[0] + B_d\boldsymbol{u}[1] \\ &\boldsymbol{x}[3] = A_d\boldsymbol{x}[2] + B_d\boldsymbol{u}[2] = A_d^{\,3}\boldsymbol{x}[0] + A_d^{\,2}B_d\boldsymbol{u}[0] + A_dB_d\boldsymbol{u}[1] + B_d\boldsymbol{u}[2] \\ &\cdots \\ &\boldsymbol{x}[k] = A_d^{\,k}\boldsymbol{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{\,k-1-i}B_d\boldsymbol{u}[i]\end{aligned}$$

（例題）

次の連続系の状態方程式に対する離散値系の状態方程式を求めよ

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

（解）

$$A_d = e^{AT} = \begin{bmatrix}1 & 1-e^{-T}\\ 0 & e^{-T}\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}] = L^{-1}\left[\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\right] = L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$B_d = (\int_0^T e^{A\lambda}d\lambda)\boldsymbol{b} = \int_0^T\begin{bmatrix}1-e^{-\lambda}\\ e^{-\lambda}\end{bmatrix}d\lambda = \begin{bmatrix}\left[\lambda+e^{-\lambda}\right]_0^T\\ \left[-e^{-\lambda}\right]_0^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T+e^{-T}-1\\ 1-e^{-T}\end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{bmatrix}x_1((k+1)T)\\ x_2((k+1)T)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1-e^{-T}\\ 0 & e^{-T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}T+e^{-T}-1\\ 1-e^{-T}\end{bmatrix}u(kT)$$

T=1(sec)とすると、e=2.7182（自然対数の底）から

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0.6321\\ 0 & 0.3678\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.3678\\ 0.6321\end{bmatrix}u(k)$$

13.2 離散値系の性質

(1) 可制御性

初期状態 $\boldsymbol{x}[0]=\mathbf{0}$ にある状態変数を有限時間で任意の状態 $\boldsymbol{x}[n]=\boldsymbol{x}_f$ にする操作量 $\boldsymbol{u}[i]$，$i=0, 1, . . .$, $n-1$ が存在するとき、離散時間状態方程式は可制御である

$$\boldsymbol{x}[n] = A_d{}^n \boldsymbol{x}[0] + \sum_{i=0}^{n-1} A_d{}^{n-1-i} B_d u[i] = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & \cdots & A_d{}^{n-1} B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \cdots \\ u[0] \end{bmatrix}$$

よって、連続時間系と同様に可制御行列が

$$rank(\begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & \cdots & A_d{}^{n-1} B_d \end{bmatrix}) = n$$

であれば、有限時間 $i=n$ で $\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{x}_f$ に移動させることができ、可制御である

(2) 可観測性

有限時間の出力 $\boldsymbol{y}$ の観測量から初期状態 $\boldsymbol{x}[0]$ を唯一に決定できるとき、離散時間状態方程式は可観測である

自由応答系 $u[\mathrm{k}]=0$（$k=0,1,\ldots$）で考えると

$$\boldsymbol{x}[k+1] = A_d \boldsymbol{x}[k]$$
$$\boldsymbol{y}[k] = C_d \boldsymbol{x}[k]$$

より

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d{}^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}[0]$$

よって、連続時間系と同様に可観測行列が

$$rank(\begin{bmatrix} C_d \\ C_d A \\ \vdots \\ C_d A_d{}^{n-1} \end{bmatrix}) = n$$

であれば、初期状態を $\boldsymbol{x}[0]$ を決定することができ、可観測である

(3) 安定性

入力 $u[\mathrm{k}]=0$（$k=0,1,\ldots$）としたときの原点の安定性について考えると

$$\boldsymbol{x}[k+1] = A_d \boldsymbol{x}[k]$$

$\mathrm{A_d}$ の固有値を λ_1, λ_2, . . . , λ_n、対応する固有ベクトルで作るモード行列を U とすると、

$$U^{-1} A_d U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{より、} A_d = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} U^{-1}$$

よって解は

$$\boldsymbol{x}[k] = A_d{}^k \boldsymbol{x}[0] = U \begin{bmatrix} \lambda_1{}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n{}^k \end{bmatrix} U^{-1} \boldsymbol{x}[0]$$

これより、$|\lambda_i| < 1$（i=1, 2, ⋯, n）ならば k→∞で $\boldsymbol{x}[k] \to \boldsymbol{0}$ となり、漸近安定である
（連続系では固有値が全て負であること、離散値系では固有値が全て絶対値が 1 より小さいこと）