10/04

2. 状態方程式

（学習内容）

・*状態方程式とは何か*

・*状態方程式の作り方を学ぶ*

古典制御：伝達関数、入力と出力の関係にだけ着目

現代制御：状態変数、入出力関係だけではなく内部状態を記述

2.1 状態方程式による表現

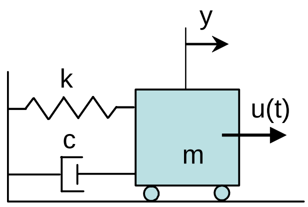
（例題）

一自由度強制振動のバネ-マス-ダンパ系の状態方程式を求める

入力：外力 u(t)

出力：変位 y(t)

質量：m、バネ定数：k、減衰係数：c



運動方程式は

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

（古典制御では）

ラプラス変換を行うと

$ms^2Y(s)+csY(s)+kY(s)=U(s)$

$(ms^2+cs+k)Y(s)=U(s)$

伝達関数 G(s)

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{(ms^2+cs+k)}$$　：2 次遅れ要素

（現代制御では）

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

と置く

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y} = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y} = \frac{1}{m}u - \frac{c}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}u \ , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$　…状態方程式表現

一般に

x_1(t)， x_2(t),…， x_n(t)　:状態変数（state variable）

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

:状態ベクトル（state vector）

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t) \\ y(t)=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

状態方程式（state equation）入力 u と状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ との関係

出力方程式（output equation）状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ と出力 y との関係

A:$n\times n$ 行列、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$：n 次元ベクトル

入出力関係だけではなく、系の内部状態を表現

状態空間（state space）:状態変数を座標軸とする空間、n 次元空間

状態空間法（state space method）:状態変数を用いたシステムの記述

2(n)階微分方程式→（2(n)個の状態変数導入）→連立１階微分方程式→（ベクトル、行列表現）→状態方程式と出力方程式

一般化

システムの動特性が n 階微分方程式で記述

$$y^{(n)}+a_n y^{(n-1)}+\cdots+a_2\dot{y}+a_1 y=b_1 u$$

状態変数をとる

$x_1=y$， $x_2=\dot{y}$， …， $x_n=y^{(n-1)}$　とおくと

$\dot{x}_1=\dot{y}=x_2$， $\dot{x}_2=\ddot{y}=x_3$， …， $\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n$

$\dot{x}_n=y^{(n)}=-a_1 y-a_2\dot{y}-\cdots-a_n y^{(n-1)}+b_1 u=-a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_nx_n+b_1u$

よって、次の状態方程式と出力方程式が得られる

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}u \quad , \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.2 伝達関数から状態方程式の導出

実現問題（realization problem）

伝達関数 G(s)は、U(s)を入力、Y(s)を出力として一般に

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(b_n s^{n-1}+\cdots+b_2 s+b_1)}{(s^n+a_n s^{n-1}+\cdots+a_2 s+a_1)}$$ で表される

一般に状態方程式は一通りとは限らない

(1) 分子が定数項の場合

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)}$$

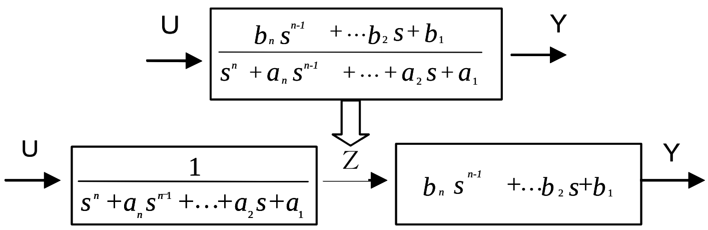
$s^n Y(s) + a_n s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_2 s Y(s) + a_1 Y(s) = b_1 U(s)$

逆 L 変換すると

$y^{(n)}(t) + a_n y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = b_1 u(t)$

→n 階微分方程式からの状態方程式、出力方程式

(2) 分子に s の項がある場合



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_n s^{n-1} + \cdots + b_2 s + b_1)}{(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)}$$

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)}$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = (b_n s^{n-1} + \cdots + b_2 s + b_1)$$

状態方程式は、状態変数を $x_1 = z,\ x_2 = \dot{z},\ \cdots,\ x_n = z^{(n-1)}$ とすると (1) と同様

出力方程式は、

$Y(s) = (b_n s^{n-1} + \cdots + b_2 s + b_1) Z(s)$

$y(t) = b_n z^{(n-1)}(t) + b_{n-1} z^{(n-2)}(t) + \cdots + b_1 z(t)$

$\quad = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n = c^T \boldsymbol{x}$ ：出力方程式

2.3 状態方程式の伝達関数による表現

状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

を伝達関数で表現する

ラプラス変換すると

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = A\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}U(s) \\ Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) \end{cases}$$

$(sI - A)\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(s)$

$Y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}U(s))$

初期状態を $\mathbf{x}_0 = 0$ とすると、 $G(s) = Y(s)/U(s) = \mathbf{c}^T (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$

（例題）

次の伝達関数の状態変数表示を求めよ

$$\mathrm{G}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s^2+7s+10)}{(s^3+5s^2+7s+3)}$$

（解）

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s^2+7s+10)}{(s^3+5s^2+7s+3)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{Z(s)}{U(s)}=\frac{1}{(s^3+5s^2+7s+3)}$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)}=(s^2+7s+10)$$

状態変数を　x_1=z,　$x_2=\dot{z}$,　$x_3=\ddot{z}$　とおくと

$\dddot{z}+5\ddot{z}+7\dot{z}+3z=u$　となるから状態方程式は

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-7&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

また　Y(s)=$(s^2+7s+10)$ Z(s)　より

y=$\ddot{z}+7\dot{z}+10$z　=$x_3+7x_2+10x_1$

$$y=\begin{bmatrix}10&7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$