3. 状態方程式の解法

（学習内容）

・状態方程式の解き方を学ぶ

・状態遷移行列とは何か

3.1 状態方程式の解

$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t)$,　$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$

$y(t)=\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)$

(1) 定数変化法

a) $u(t)=0$ の場合：自由応答系

$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)$,　$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$　　→行列の微分方程式

スカラの微分方程式　$\dot{x}(t)=ax(t)$,　$x(0)=x_0$　の解は

$dx(t)/dt=ax(t)$　　$dx(t)/x(t)=adt$

両辺を積分　$\log x(t)=at+c$

よって解は　$x(t)=e^{(at+c)}=e^{at}\cdot x_0$

スカラの微分方程式の解を行列の場合に拡張

解は　$\boxed{\mathbf{x}(t)=e^{At}\cdot\mathbf{x}_0}$　と表現できる

（証明）

テイラー展開より

$$e^{at}=1+at+\frac{a^2t^2}{2!}+\frac{a^3t^3}{3!}+\cdots==\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\cdot a^it^i \qquad \leftarrow \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}\cdot A^2t^2++\frac{1}{3!}\cdot A^3t^3\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\cdot A^it^i \quad \text{と定義} \qquad (1)$$

$\mathbf{x}(t)=e^{At}\cdot\mathbf{x}_0$　とすると

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(I+At+\frac{1}{2!}\cdot A^2t^2+\cdots\right)\mathbf{x}_0=\left(A+\frac{1}{2!}\cdot A^2 2t+\frac{1}{3!}\cdot A^3 3t^2+\cdots\right)\mathbf{x}_0$$

$$=A\left(I+At+\frac{1}{2!}\cdot A^2t^2+\cdots\right)\mathbf{x}_0=Ae^{At}\cdot\mathbf{x}_0$$

e^{At}：状態遷移行列（transition matrix）初期状態 $\mathbf{x}_0$ に e^{At} を乗ずると任意時刻 t の $\mathbf{x}(t)$ が生成

b) $u(t)\neq 0$ の場合

$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}u(t)$,　$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$

定数変化法を用いる　　　　　　　　　　　　　　　…($x(t)=e^{At}\cdot x_0$　の定数部分 x_0 を t の関数と置く)

解を　$x(t)=e^{At}[x_0+z(t)]$, $z(0)=0$　　と仮定し状態方程式に代入

左辺 $=Ae^{At}[x_0+z(t)]+e^{At}\dot{z}(t)$　右辺 $=Ae^{At}[x_0+z(t)]+bu(t)$

$e^{At}\dot{z}(t)=bu(t)$

$\dot{z}(t)=e^{-At}bu(t)$

$z(t)=\int_0^t e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau$

ゆえに解は　$x(t)=e^{At}[x_0+\int_0^t e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau]=\boxed{e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\cdot bu(\tau)d\tau}$

(2) ラプラス変換による解法

$\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)$

ラプラス変換

$sX(s)-x(0)=AX(s)+bU(s)$

$(sI-A)X(s)=x_0+bU(s)$

$X(s)=[sI-A]^{-1}[x(0)+bU(s)]$

ラプラス逆変換により x(t)を得る

$\boxed{x(t)=L^{-1}[[sI-A]^{-1}[x(0)+bU(s)]]}$

3.2 状態遷移行列 e^{At}

(1) 遷移行列の性質(... e^{At} は行列である)

a) $e^{A0}=I$

b) $e^{At_1}\cdot e^{At_2}=e^{A(t_1+t_2)}$

c) $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

d) $d(e^{At})/dt=Ae^{At}$

(2) e^{At} の計算

a)定義式　$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}\cdot A^2t^2++\frac{1}{3!}\cdot A^3t^3\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\cdot A^it^i$　から計算

計算機での近似計算に使用

b)ラプラス逆変換

$\dot{x}(t)=Ax(t)$　をラプラス変換

$sX(s)-x_0=AX(s)$

$(sI-A)X(s)=x_0$

$X(s)=(sI-A)^{-1}x_0$

これより　$x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]\ x_0$

$x(t)=e^{At}\cdot x_0$ と比較し、$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$　を得る

（例題 1）

状態方程式 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ の状態遷移行列をもとめよ

（解）

$$s\mathrm{I}-\mathrm{A}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

よって $e^{\mathrm{A}t}=L^{-1}[(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$ $\leftarrow\ e^{-at}\to\dfrac{1}{s+a}$

（例題 2）

状態方程式 $\dot{\mathrm{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\mathrm{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{u}$, $\mathrm{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, u(t)=1 について x(t)を求めよ

（解）

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathrm{A}t}\mathbf{x}_0+\int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\,\mathbf{b}u(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left[e^{-(t-\tau)}-\dfrac{1}{2}e^{-2(t-\tau)}\right]_0^t\\ \left[-e^{-(t-\tau)}+e^{-2(t-\tau)}\right]_0^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}+e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t}\end{bmatrix}$$

ラプラス逆変換で求めると

$$\mathbf{X}(s)=[s\mathrm{I}-\mathrm{A}]^{-1}[\mathbf{x}(0)+\mathbf{b}U(s)]=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\left[\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}+e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t}\end{bmatrix}$ $\leftarrow$ u(t)→1/s, $e^{-at}\to\dfrac{1}{s+a}$