4. 状態方程式の同値変換

（学習目標）

・*状態方程式の同値変換について理解する*

・*行列の対角化の方法を学ぶ*

4.1 同値変換

状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases} \qquad (1)$$

に対して、正則な（$det\ P \neq 0$）一次変換　$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}^*$　を用いて座標変換を行う

$$P\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = AP\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{b}u(t) \qquad y(t) = \boldsymbol{c}^T P\boldsymbol{x}^*(t)$$

よって

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = A^*\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{b}^*u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^{*T} \boldsymbol{x}^*(t) \end{cases} \qquad (2)$$

ここで、　$A^*=P^{-1}AP$,　$\boldsymbol{b}^*=P^{-1}\boldsymbol{b}$,　$\boldsymbol{c}^{*T}=\boldsymbol{c}^TP$

$\boldsymbol{x}^*$ を新しい状態変数とした状態方程式が得られる

状態変数の取り方は異なるが、入力と出力は全く同じ系

これを同値変換（線形変換）という（(1)と(2)は互いに同値）

同値変換により便利な形に変換し、解析、設計に利用

4.2 対角化

1）特性方程式

n×n 行列 A に対して

$det(\lambda I - A) = \varphi(\lambda) = \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda + a_1 = 0$

行列 A の特性方程式（characteristic equation）

多項式 $\varphi(\lambda)$：行列 A の特性多項式（characteristic polynominal）

2）固有値と固有ベクトル

特性方程式の n 個の根 λ を行列 A の固有値（eigen value）という

0 でない n 次ベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$

を満たすとき $\boldsymbol{v}$ を A の固有ベクトル（eigen vector）という

同値変換では、A と A^*の固有値は等しい

証）$det(\lambda I - A^*) = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| = |\lambda I - A|$

3)行列の対角化

特性方程式の n 個の根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ に対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_n$ とする

$A\boldsymbol{v}_i=\lambda_i \boldsymbol{v}_i$ (i=1, 2, …n)

ここで、$U=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots \boldsymbol{v}_n]$ ：A のモード行列（modal matrix）

$$A[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \ldots \boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \ldots \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$U^{-1}AU=U^{-1}U\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$ 行列 A の対角化（diagonalization）

4) モード変換

状態方程式に対してモード行列による座標変換 $\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{x}^*$ を行う

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=A^*\boldsymbol{x}^*(t)+\boldsymbol{b}^*u(t)\\ y(t)=\boldsymbol{c}^{*T}\boldsymbol{x}^*(t)\end{cases}$$

ここで、 $A^*=U^{-1}AU$, $\boldsymbol{b}^*=U^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}^{*T}=\boldsymbol{c}^TU$

この表現を対角正準形式という（正準形式：座標変換によって使いやすい形に変形したもの）

2 次系では次の表現となる

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1^*\\ \dot{x}_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1^*\\ b_2^*\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_1^* & c_2^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}\end{cases}$$

n 個の並列なモード x_i に分解される →可制御性、可観測性等の判定に利用可能

（例題 1）

次の行列のモード行列を求め、対角化せよ

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

（解）

$$det(\lambda I-A)=det\begin{bmatrix}\lambda-4 & 5\\ -2 & \lambda+3\end{bmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+3)+5\cdot 2=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$$

より $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ ：固有値

$$(\lambda_1 I-A)\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-1-4 & 5\\ -2 & -1+3\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$(\lambda_2 I\text{-}A)\boldsymbol{v}_2=$ $\begin{bmatrix} 2-4 & 5 \\ -2 & 2+3 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

この解は　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　　　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$　　　　　：固有ベクトル

モード行列は　$U=[\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2]=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$U^{-1}AU=\dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$　　　と対角化

4.3 ジョルダン標準形

行列 A の特性方程式が重根をもつ場合、対角化できないことがある

→　ジョルダン標準形（Jordan's canonical form）（準対角形式）に変換可能

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{bmatrix}$$

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$　　J_i：ジョルダンブロック

ここで、モード行列 $U=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \dots \boldsymbol{v}_n]$ を構成する n 重根の列ベクトルは

$(\lambda_i I\text{-}A)\boldsymbol{v}_i=0$

$(A\text{-}\lambda_i I)\boldsymbol{v}_{i+1}=\boldsymbol{v}_i$　　$(i=1,2,\dots n\text{-}1)$

で定める

重根以外の固有ベクトルは

$A\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i$

（証）$A[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$　が成り立つとすると

$$A\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \qquad A\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2$$

3 次系で考えると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{x}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} u, \quad y=\begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* & c_3^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

（例題 2）

次の行列のモード行列を求め、ジョルダン標準形に対角化せよ

A=$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

（解）

$det(\lambda I\text{-}A) = det\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+3 & -1 \\ 4 & -4 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+3)^2+4+4(\lambda+3)-4(\lambda+3) = (\lambda+1)^2(\lambda+4)$

より　$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-4$　：固有値

$(\lambda_1 I\text{-}A)\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1=0$　より、$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(A\text{-}\lambda_1 I)\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1$　より、$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(\lambda_3 I\text{-}A)\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_3=0$　より、$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$U=[\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2\,\boldsymbol{v}_3]=\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　と置き

$U^{-1}AU=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

とジョルダン標準形に対角化