5. 可制御性と可観測性

（学習目標）

可制御性の判定方法について学ぶ

可観測性の判定方法について学ぶ

5.1 可制御性

可制御性（controllability）:

状態方程式が与えられたとき、入力 u によって系の状態を任意に制御できる

（定義）

任意の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ と状態ベクトル $\mathbf{x}_f$ に対し、有限時間 t_f の入力 $u(t)$ $(0\leqq t<\leqq t_f)$ によって、$\mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f$ とできるとき、システムは可制御であると言う。

(1) モード変換による判定

状態方程式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)\\ y(t)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\qquad(1)$$

に対してモード変換　$\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{x}^*$　を行う

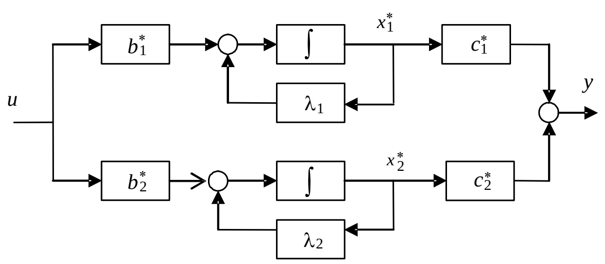
$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)=\Lambda\boldsymbol{x}^*(t)+\boldsymbol{b}^*u(t)\\ y(t)=\boldsymbol{c}^{*T}\boldsymbol{x}^*(t)\end{cases}\qquad(2)$$

$\Lambda=U^{-1}AU,\quad \boldsymbol{b}^*=U^{-1}\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{c}^{*T}=\boldsymbol{c}^TU$

2 次系で A の固有値が λ_1,λ_2 である場合を考える

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1^*\\ \dot{x}_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1^*\\ b_2^*\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_1^* & c_2^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}\end{cases}$$

ブロック図で表現すると



n 個の並列なモード x_i^* に分類される

ここで b_1^*, b_2^* のいずれかが 0 であると、対応するモード $x_i^*(i=1,2)$ に入力 u が作用しない

→制御できない

可制御であるためには、モード変換した状態方程式においてベクトル b^* の要素に 0 がない

(2) 可制御行列による判定

n 次一入出力系が可制御であるための必要十分条件は

$V=[\mathbf{b}\ A\mathbf{b}\ \ldots\ A^{n-1}\mathbf{b}]$ ：可制御行列

とおくとき rank V=n

行列 V が n 次正方表列の場合、|V|≠0 で判定

（証明）

状態方程式の解より $t=t_f$ のとき

$$\boldsymbol{x}(t_f)=e^{At_f}[\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{t_f}e^{-A\tau}\,\boldsymbol{b}\,u(\tau)d\tau]$$

$$e^{-At_f}\boldsymbol{x}(t_f)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^{t_f}e^{-A\tau}\,\boldsymbol{b}\,u(\tau)d\tau \qquad (1)$$

任意の $x(t_f), x(0)$ が与えられたとき、上式を満たす $u(t)$ が存在すればよい

ところで、

$e^{At}=I+At+1/2!A^2t^2+\ldots+1/n!A^nt^n+\ldots$ （定義）

ここで $F(A)=A^n+a_nA^{n-1}+\ldots+a_2A+a_1I$ （n 次の多項式）とおくと、

$e^{At}=P(A)F(A)+Q(A)$ ：Q(A)は A の n-1 次多項式

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_n\lambda^{n-1}+\cdots+a_2\lambda+a_1=0$ $\lambda\rightarrow A$

$F(A)=A^n+a_nA^{n-1}+\cdots+a_2A+a_1I=0$ となる

よって

$e^{At}=Q(A)=q_1(t)I+q_2(t)A+\cdots+q_n(t)A^{n-1}$ と表せる

これを(1)の右辺に代入し

$$\begin{aligned}\int_0^{t_f}e^{-A\tau}\,\mathbf{b}\,u(\tau)d\tau &=\int_0^{t_f}(q_1(-\tau)I+q_2(-\tau)A+\cdots q_n(-\tau)A^{n-1})\mathbf{b}u(\tau)d\tau\\ &=\mathbf{b}\int_0^{t_f}q_1(-\tau)u(\tau)d\tau+A\mathbf{b}\int_0^{t_f}q_2(-\tau)u(\tau)d\tau+\cdots+A^{n-1}\mathbf{b}\int_0^{t_f}q_n(-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

$h_i=\int_0^{t_f}q_i(-\tau)u(\tau)d\tau$ とおくと

右辺$=\mathbf{b}h_1+A\mathbf{b}h_2+\ldots+A^{n-1}\mathbf{b}h_n=V\mathbf{h}$ $\mathbf{h}=\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}$

任意の $x(t_f), x(0)$ を与えると、左辺は任意のベクトルとなる

両辺を等しくする h が存在するためには、V の列ベクトルが 1 次独立

よって rank V=n

（A が n×n 次元正方行列の場合、|A|≠0 であれば rank A=n）

5.2 可観測性

可観測性（observability）：

出力方程式が与えられたとき、出力 y の観測によって任意の内部状態を知ることができる

（定義）

有限時間 t_f に対する入力 u(t) と出力 y(t)($0\leqq t<\leqq t_f$)の測定から、初期状態 x(0)を唯一に決定できるとき、システムは可観測であると言う。

(1) モード変換による判定

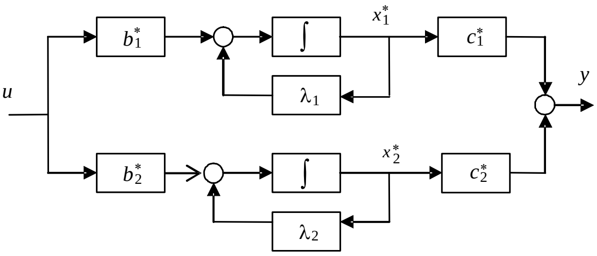
状態方程式のモード変換

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \Lambda \boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{b}^* u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^{*T} \boldsymbol{x}^*(t) \end{cases}$$

$\Lambda = U^{-1}AU$, $b^* = U^{-1}b$, $c^{*T} = c^TU$

2 次系で考える

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \end{cases}$$



ここで c_1^*, c_2^*のいずれかが 0 であると、対応するモード $x_i^*(i=1,2)$ の影響が出力 y に作用しない

→観測できない

可観測であるためには、モード変換した状態方程式においてベクトル c^*の要素に 0 がない

(2) 可観測行列による判定

n 次一入出力系が可観測であるための必要十分条件は

$$N = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$ ：可観測行列

とおくとき　rank N=n

（例題）

次の可制御性、可観測性を調べよ

1） $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$　$c^T=[1\ \ 0]$

2） $A=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$c^T=[1\ \ 1]$

3） $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$　$c^T=[1\ \ 0]$

（解）

1)　[b　Ab]= $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$　　$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$

よって、非可制御、可観測

2)　[b　Ab]= $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$　　$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

よって、非可制御、非可観測

3)　[b　Ab]= $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$　　$\begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4 \neq 0$　　$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$

よって、可制御、可観測

（モード変換による判定）

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

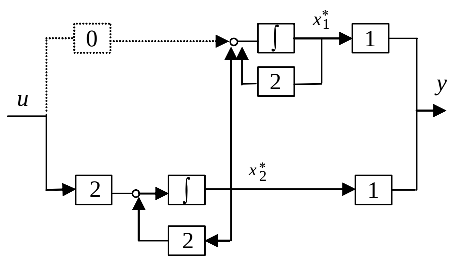
より　$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$　（重根）

$(\lambda_1 I - A) v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　　$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(A - \lambda_1 I) v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　　$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Lambda = U^{-1} A U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　　$b^* = U^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$　　$c^{*T} = c^T U = [1 \;\; 1]$



x_1^*はx_2^*を介してuの影響を受けるので可制御、可観測