6. 安定判別

（学習内容）

・*安定性の概念を理解する*

・*安定判別方法を学ぶ*

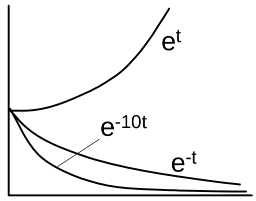
6.1 安定性

(1) 安定性の概念

$\dot{x}(t)=ax(t)$の解は

$dx(t)/dt=ax(t) \quad dx(t)/x(t)=adt \quad \log x(t)=at+c$

$x(t) = e^{(at+c)} = e^{at}\cdot x(0)$



解の挙動は a の値によって左右される

a>0 発散→不安定

a<0 収束→安定

a<<0 収束が速い→速応性

(2) リアプノフの安定理論

非線形の場合も含めて適用可能

a) 安定（stable）

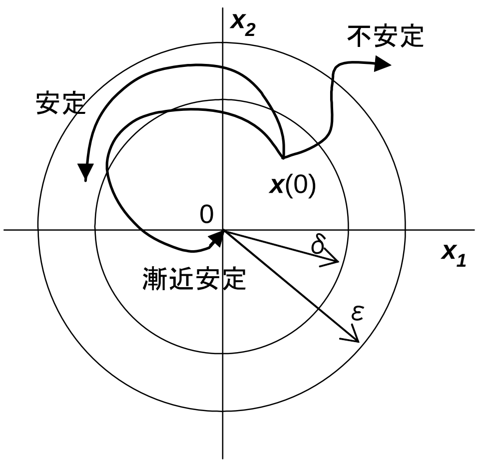
任意の $\varepsilon>0$ に対し適当な $\delta(\varepsilon)>0$ が存在し、$|\boldsymbol{x}(0)|<\delta$ を初期状態とする $\boldsymbol{x}(t)$が、それ以降 $|\boldsymbol{x}(t)|<\varepsilon$ を満たすとき、原点はリアプノフの意味で安定であるという

b) 漸近安定（asymptotically stable）

原点が安定で、かつ$|\boldsymbol{x}(0)|<\delta$ から出発した解軌道が $t\to\infty$で$|\boldsymbol{x}(t)|\to 0$ となるとき、原点は漸近安定であるという

c) 大域的漸近安定（asymptotically stable in the large）

漸近安定が原点近傍だけではなく、任意の点を $\boldsymbol{x}(0)$として成り立つとき、大域的漸近安定であるという



(3) 自由応答系の漸近安定性

自由応答系の状態方程式

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{A}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ の解を考える

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$、固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_n$ とし

モード行列 $U = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ldots \boldsymbol{v}_n]$ により $\boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{U}\boldsymbol{z}(\mathrm{t})$ と座標変換すると

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{z}$$

この解は $\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) \qquad z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0)$

よって

$$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{z}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} z_1(0) + \boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t} z_2(0) + \cdots \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t} z_n(0)$$

と表せる

このとき、全ての固有値 λ_i の実部が負であれば

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(\mathrm{t}) = \boldsymbol{0}$$

となり、漸近安定 → A を安定行列という

(4) 有界入力－有界出力安定

一般の入出力系

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

ある正数 M_1, M_2 に対し、任意の入力 u(t)が有界 $|u(t)| \leqq M_1$ ならば出力 y(t)も有界 $|y(t)| \leqq M_2$ であるとき、このシステムは有界入力－有界出力安定（bounded-input, bounded-output stability: BIBO 安定）という

→自由応答系が漸近安定ならば、各状態変数 $x_i(t)$ は有界となり、対応する一般の入出力系は BIBO 安定である

6.2 フルビッツの安定判別

行列 A の固有値を求めずに判別する方法

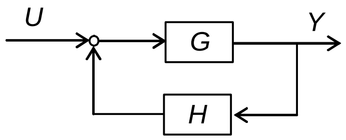
$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\,u(t)$

の特性方程式は $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda + a_1 = 0$

この根が固有値

特性根の実部が負であればよい

→フルビッツの安定判別法が利用できる



古典制御論では

W(s)=Y(s)/U(s)=G(s)/(1+G(s)H(s))

1+G(s)H(s)=0　　特性方程式

この特性根を $r_1, r_2, \cdots r_n$ とすると、r_i の実部が負であれば安定

$1+G(s)H(s)=(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)$

$G(s)/(1+G(s)H(s))=G(s)/(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)=k_1/(s-r_1)+k_2/(s-r_2)+\cdots+k_n/(s-r_n)$

逆ラプラス変換によりインパルス応答は

$$y(t)=k_1e^{r_1t}+k_2e^{r_2t}+\cdots+k_ne^{r_nt}$$

フルビッツの安定判別法

：特性方程式の係数だけで根の実部の正負を判定する方法

特性方程式

$\lambda^n+a_n\lambda^{n-1}+\cdots+a_2\lambda+a_1=0$

に対し、次式のフルビッツ行列式 H_n を定義

$$H_n=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} & & \vdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_1 \end{vmatrix}$$

制御系が安定となる必要十分条件は

1）係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ が全て存在しかつ正である

2）フルビッツ行列式 H_i（$i=1, 2, \cdots, n$）が全て正となる

$H_1=a_n>0$,　　$H_2=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}>0$,　　$H_3=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}>0$　　$\cdots$ $H_n>0$

（例題）

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$ の安定性を調べよ

（解）

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & -1\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+3$$

特性方程式の係数は全て正

フルビッツ行列式は

$$\mathrm{H_n}=\begin{vmatrix}4 & 6 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 3\end{vmatrix}$$

$$H_1=4>0 \qquad H_2=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 6\end{vmatrix}=18>0 \qquad H_3=\begin{vmatrix}4 & 6 & 0\\ 1 & 6 & 3\\ 0 & 4 & 6\end{vmatrix}=60>0 \qquad H_4=4\begin{vmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 6 & 0\\ 1 & 6 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}6 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 0\\ 1 & 6 & 3\end{vmatrix}=180>0$$

よって漸近安定