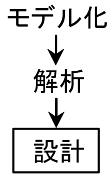
7. 極配置

（学習内容）

・*状態フィードバックの原理を理解する*

・*極配置の方法を学ぶ*



7.1 状態フィードバック

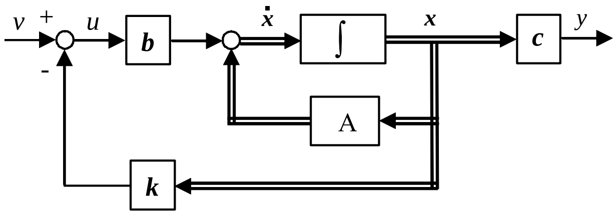
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

状態変数 x(t)は全て測定可能であると仮定し

$u(t)=-\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)+v(t)$

なるフィードバックを行う

状態フィードバック：状態変数をフィードバック係数ベクトル $\mathbf{k}^T$ を介してフィードバックさせる



フィードバック系の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}v(t)$$

特性（安定性、速応性等）を示す行列は、A から $A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ に変わる

フィードバック系のシステムの特性は、$A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ の固有値に従う

フィードバック係数行列 $\mathbf{k}^T$ を操作することで、$A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ の固有値を変える

→　極配置問題（pole assignment problem）

a）$A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ の固有値を複素平面の左半平面に設定することで安定性

b）$A-\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ の固有値を複素左半平面のより遠くに設定することで速応性

7.2 可制御標準形

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

は可制御とする。この特性方程式は　$|sI-A|=s^n+a_ns^{n-1}+\cdots+a_2s+a_1=0$　と表される。

ここで

$$P = VT = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

を用い、x=Pz　の座標変換を行うと

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = P^{-1}AP\boldsymbol{z}(t) + P^{-1}\boldsymbol{b}u(t) = \overline{A}\boldsymbol{z}(t) + \overline{\boldsymbol{b}}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T P\boldsymbol{z}(t) = \overline{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{z}(t)\end{cases}$$

となる。ここで、

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{b}} = P^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T P = \begin{bmatrix} \overline{c}_1 & \overline{c}_2 & \cdots & \overline{c}_n \end{bmatrix}$$

これを可制御標準形という

次に、状態フィードバック系

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}v(t)$$

に対し、同様に　x=Pz　　の座標変換を行うと

$$P\dot{\boldsymbol{z}} = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)P\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}v \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = P^{-1}(A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)P\boldsymbol{z} + P^{-1}\boldsymbol{b}v$$

よって

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = (\overline{A} - \overline{\boldsymbol{b}}\overline{\boldsymbol{k}}^T)\boldsymbol{z}(t) + \overline{\boldsymbol{b}}v(t)$$

ここで、

$$\overline{\boldsymbol{k}}^T = \boldsymbol{k}^T P = \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \cdots & \overline{k}_n \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} - \overline{\boldsymbol{b}}\overline{\boldsymbol{k}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \cdots & \overline{k}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_1 + \overline{k}_1) & -(a_2 + \overline{k}_2) & -(a_3 + \overline{k}_3) & \cdots & \cdots & -(a_n + \overline{k}_n) \end{bmatrix}$$

となり、これは状態フィードバック系の特性方程式が

$$|sI - (\overline{A} - \overline{\boldsymbol{b}}\overline{\boldsymbol{k}}^T)| = s^n + (a_n + \overline{k}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \overline{k}_2)s + (a_1 + \overline{k}_1) = 0$$

であることを意味する。

よって、係数ベクトル　$\overline{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & \overline{k}_2 & \cdots & \overline{k}_n \end{bmatrix}$　を適当に選ぶことで、システムの固有値を任意に設定できることがわかる。

もとの座標系では、$\boldsymbol{k}^T = \overline{\boldsymbol{k}}^T P^{-1}$

7.3 フィードバック係数行列の求め方

$u(t)=-\mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)+v(t)$　　$\mathbf{k}=[k_1\ k_2 \cdots k_n]$

の状態フィードバックにより、希望の固有値 $r_1, r_2 \cdots r_n$ とする

もとのシステムの特性方程式を

$|sI-A|=s^n+a_n s^{n-1}+\cdots+a_2 s+a_1=0$

可制御標準形への変換行列は

$$P=VT=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1\\ a_3 & & \iddots & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ a_n & \iddots & \iddots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

と表される。また、$\bar{\boldsymbol{k}}^T=\boldsymbol{k}^T P$　とする

変数変換して考えると、状態フィードバック系の特性方程式は

$s^n+(a_n+\bar{k}_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+\bar{k}_2)s+(a_1+\bar{k}_1)=0$　　で表される

一方、希望固有値を持つシステムの特性方程式は

$(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)=s^n+\beta_n s^{n-1}+\cdots\beta_2 s+\beta_1=0$　　で表される

これを比較し、$\bar{k}_1=\beta_1-a_1$　　$\bar{k}_2=\beta_2-a_2$　.... $\bar{k}_n=\beta_n-a_n$

$\boldsymbol{k}^T=\bar{\boldsymbol{k}}^T P^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \cdots & \bar{k}_n\end{bmatrix}P^{-1}$

により　$k^T=[k_1\ k_2\cdots k_n]$ が求まる

（例題）

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

に状態フィードバックを施し、固有値を $r_1=-5$, $r_2=-6$ に配置せよ

（解）

元のシステムの特性方程式は

$|sI-A|=(s-4)(s+1)+6=s^2-3s+2=(s-1)(s-2)=0$

となり、固有値は 1,2 となる。不安定

可制御性を調べる。可制御行列は

$$V=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$|V|=3\neq 0$　　となり、可制御。よって状態フィードバックが可能

A の特性方程式から

$|sI-A|=s^2-3s+2=0$

可制御標準形への変換行列は

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

座標変換して考えると、状態フィードバック系の特性方程式は

$$s^2+(-3+\bar{k}_2)s+(2+\bar{k}_1)=0$$

一方、希望固有値を持つシステムの特性方程式は

$(s+5)(s+6)=s^2+11s+30=0$

よって　$k_1=30-2=28$　$k_2=11+3=14$

$$\boldsymbol{k}^T=\bar{\boldsymbol{k}}^T P^{-1}=\begin{bmatrix} 28 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -28 & 14 \end{bmatrix}$$

（別解）　直接解法

$k^T=[k_1 \ \ k_2]$　とおく

状態フィードバック系の特性方程式は

$$|sI-(A-bk^T)|=\left|\begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} s-4 & 3 \\ k_1-2 & s+k_2+1 \end{vmatrix}=(s-4)(s+k_2+1)-3(k_1-2)$$

$$=s^2+(k_2-3)s+(2-3k_1-4k_2)=0$$

一方、希望固有値を持つシステムの特性方程式は

$(s-r_1)(s-r_2)=(s+5)(s+6)=s^2+11s+30=0$

よって両式を比較し

$k_2-3=11$,　$2-3k_1-4k_2=30$

これを解くと　$k_1=-28$,　$k_2=14$

ゆえに　$k^T=[-28 \ \ 14]$

（問題が大きくなると連立方程式を解くのがたいへんになる）