8. 状態観測器

（学習内容）

・状態観測器の原理を理解する

・状態観測器の設計方法を学ぶ

8.1 状態観測器の考え方

1）基本的な考え方

状態フィードバックによって制御系の設計を行うためには、状態変数の測定が必要

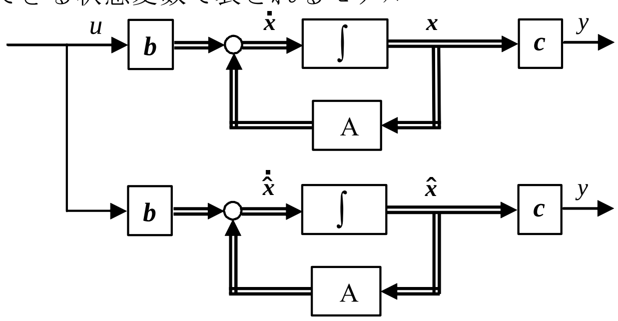
状態変数を推定する方法　→　状態観測器（オブザーバ：observer）

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

に対して、制御対象と同じ動特性をもち測定できる状態変数で表されるモデル

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

を考える。



$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

を推定誤差とすると、

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)) - (A\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t)) = A(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = A\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = e^{At}\boldsymbol{\varepsilon}(0)$$

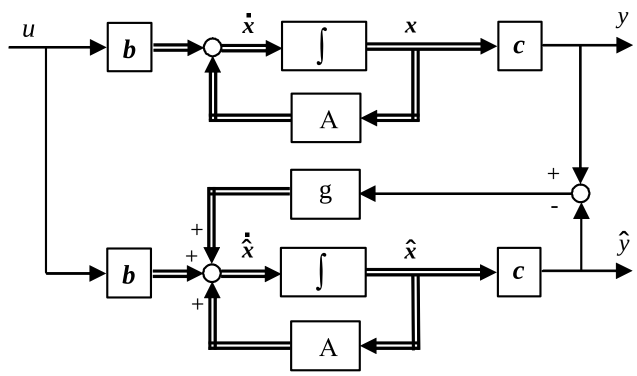
A の全ての固有値の実部が負（安定）であれば、 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{0}$ となり、$\hat{\mathbf{x}}$ は $\mathbf{x}$ の推定値となる

A が不安定の場合にも適用できる方法が必要

2）ルーエンバーガー（Luenberger）の状態観測器

制御対象と同一の動特性をもち、両者の出力の差をフィードバックしたモデルを考える

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{g}\{(y(t) - \hat{y}(t)\} \\ \hat{y}(t) = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

を推定誤差とすると、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \{A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)\} - \{A\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{g}\mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}(t)\} = (A - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\mathbf{x}(t) - (A - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= (A - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\{\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\} = (A - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = e^{(A - \mathbf{g}\mathbf{c}^T)t}\boldsymbol{\varepsilon}(0)$$

となり

$\hat{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t)$　となるかどうかは状態観測器　A−$\mathbf{gc}^T$　の固有値に従う

g を適当に選択することによって、A−$\mathbf{gc}^T$　を安定行列にすることができる

8.2 可観測標準形

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

A は可観測とする

A の特性方程式は　$|sI-A| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$

$$P = TN = \begin{bmatrix} a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ \vdots & ⋰ & 1 & 0 \\ a_n & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

なる行列を考え、$x = P^{-1}z$　と座標変換を行う

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = PAP^{-1}\boldsymbol{z}(t) + P\boldsymbol{b}u(t) = \overline{A}\boldsymbol{z}(t) + \overline{\boldsymbol{b}}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{c}^T P^{-1}\boldsymbol{z}(t) = \overline{c}^T \boldsymbol{z}(t) \end{cases}$$

となる。ここで、

$$\overline{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{b}} = P\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \vdots \\ \overline{b}_n \end{bmatrix} \qquad \overline{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T P^{-1} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

これを可観測標準形という

次に状態観測器

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (A - \mathbf{gc}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}y(t) + \mathbf{b}u(t)$$

に対し同様に　$\hat{\mathbf{x}} = P^{-1}\mathbf{z}$

の座標変換を行うと

$$P^{-1}\dot{\mathbf{z}} = (A - \mathbf{gc}^T)P^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{g}y + \mathbf{b}u \qquad \dot{\mathbf{z}} = P(A - \mathbf{gc}^T)P^{-1}\mathbf{z} + P\mathbf{g}y + P\mathbf{b}u$$

よって

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\overline{A} - \overline{\mathbf{g}}\overline{\mathbf{c}}^T)\mathbf{z}(t) + \overline{\mathbf{g}}y(t) + \overline{\mathbf{b}}u(t) \qquad \overline{A} = PAP^{-1}, \quad \overline{\mathbf{b}} = P\mathbf{b}, \quad \overline{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T P^{-1}, \quad \overline{\mathbf{g}} = P\mathbf{g}$$

ここで

$$\overline{A} - \overline{\mathbf{g}}\overline{\mathbf{c}}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{g}_1 \\ \overline{g}_2 \\ \vdots \\ \overline{g}_n \end{bmatrix} [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + \overline{g}_1) \\ 1 & \ddots & \vdots & -(a_2 + \overline{g}_2) \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 & -(a_n + \overline{g}_n) \end{bmatrix}$$

となり、これは座標変換前の状態観測器の特性方程式が

$$\left| sI - (A - \boldsymbol{gc}^T) \right| = s^n + (a_n + \overline{g}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \overline{g}_2)s + (a_1 + \overline{g}_1) = 0$$

であることを意味する

ゆえに、状態観測器　A-$\mathbf{gc}^T$　の固有値は　$\overline{\mathbf{g}} = [\overline{g}_1 \quad \overline{g}_2 \quad \cdots \quad \overline{g}_n]^T$　を適当に選ぶことで任意に設定できる

もとの座標系では、 $\mathbf{g} = P^{-1}\overline{\mathbf{g}}$

8.3 状態観測器係数行列の求め方

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (A - \mathbf{gc}^T)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}y(t) + \mathbf{b}u(t) \qquad \mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n]^T$$

の状態観測器を希望の固有値 $r_1, r_2 \cdots r_n$ とする

もとのシステムの特性方程式は

$|sI-A| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$

可観測標準形への座標変換を

$$P = TN = \begin{bmatrix} a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ a_n & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{z}$　によって行う。このとき状態観測器の特性方程式は

$$s^n + (a_n + \overline{g}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + \overline{g}_2)s + (a_1 + \overline{g}_1) = 0$$

一方、希望固有値を持つ状態観測器の特性方程式は

$(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n) = s^n + \beta_n s^{n-1} + \cdots \beta_2 s + \beta_1 = 0$

これを比較し、

$$\overline{g}_1 = \beta_1 - a_1 \quad \overline{g}_2 = \beta_2 - a_2 \cdots \quad \overline{g}_n = \beta_n - a_n$$

$$\mathbf{g} = P^{-1}\overline{\mathbf{g}} = P^{-1}\begin{bmatrix} \overline{g}_1 \\ \overline{g}_2 \\ \vdots \\ \overline{g}_n \end{bmatrix}$$

により　$g_1 \ g_2 \cdots g_n$ が求まる

（例題）

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y = [1 \quad 1 \quad 0]\mathbf{x}$$

について、状態観測器の固有値を全て-1 に設定せよ

（解）

A の特性方程式から

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 3 & s+2 \end{vmatrix} = s^3 + s^2 - 2s + 3s = s^3 + s^2 + s$$

可観測標準形への変換行列は

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&1&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

$\bar{\boldsymbol{g}}=P\boldsymbol{g}$　を用いると、状態観測器の特性方程式は

$$s^3+(1+\bar{g}_3)s^2+(1+\bar{g}_2)s+(0+\bar{g}_1)=0$$

一方、希望固有値を持つ状態観測器の特性方程式は　$(s+1)^3=s^3+3s^2+3s+1=0$

よって　$\bar{g}_1=1-0=1$　$\bar{g}_2=3-1=2$　$\bar{g}_3=3-1=2$

$$\mathbf{g}=P^{-1}\bar{\mathbf{g}}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&1&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$$