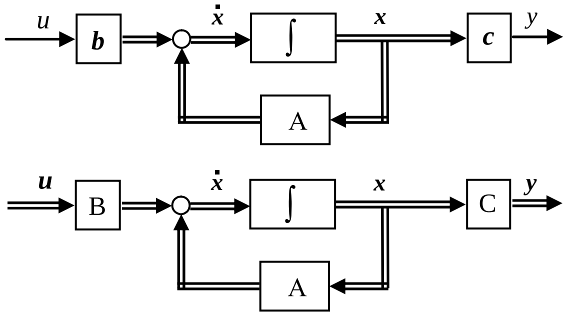
9. 多入出力システム

（学習内容）

・*多入出力システムの状態方程式表現を学ぶ*

・*一入出力系と多入出力系の違いを理解する*



9.1 状態方程式

一入出力系

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

→　多入出力系の状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$：n 次元状態ベクトル、$\boldsymbol{u}$：m 次元入力ベクトル、$\boldsymbol{y}$：l 次元出力ベクトル

A：n×n 行列、B：n×m 行列、C： l×n 行列

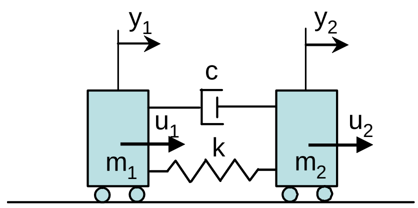
（例題）

物体 A、B による 2 自由度のバネ−マス−ダンパ系の状態方程式を考える

質量：m_1，m_2、バネ定数：k、減衰係数：c

入力：外力 $u_1(t)$，$u_2(t)$

出力：変位 $y_1(t)$，$y_2(t)$



物体 A、B についての運動方程式は

$$m_1\ddot{y}_1(t) = k(y_2(t) - y_1(t)) + c(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + u_1(t)$$
$$m_2\ddot{y}_2(t) = -k(y_2(t) - y_1(t)) - c(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + u_2(t)$$

状態ベクトルを

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] = [y_1 \quad \dot{y}_1 \quad y_2 \quad \dot{y}_2]$$

とすると、次の状態方程式、出力方程式を得る

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -c/m_1 & k/m_1 & c/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & c/m_2 & -k/m_2 & -c/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

9.2 伝達関数行列

状態方程式と伝達関数の関係

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

ラプラス変換を行うと

$s\mathbf{X}(s)$-$\mathbf{x}_0$=A$\mathbf{X}(s)$+B$\mathbf{U}(s)$　　$\mathbf{Y}(s)$=C$\mathbf{X}(s)$

(sI-A)$\mathbf{X}(s)$=B$\mathbf{U}(s)$+$\mathbf{x}_0$　　$\mathbf{Y}(s)=C(sI-A)^{-1}(B\mathbf{U}(s)+\mathbf{x}_0)$

よって初期値 x_0=0 とし、

$G(s)=\mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s)=C(sI-A)^{-1}B$

G(s)：伝達関数行列　l×m 行列

（例題）

次の伝達関数行列を求めよ

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

（解）

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)^3} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI-1)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)^3} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（注）

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}, \qquad adj\ A = [b_{ij}]^T$$ ：A の余因子行列（adjugate matrix）

a_{ij} の i 行 j 列を除き $(-1)^{i+j}$ をかけた行列式である余因子 b_{ij} を (i, j) 要素とする行列の転置行列

$$adj\ A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$b_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad b_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots.$$

一入出力系での多くの性質は多入出力系に形式的に拡張できる

9.3 状態方程式の解

一入出力系

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{At}}\mathbf{x}_0 + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{B}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

多入出力系では

9.4 可制御性と可観測性

可制御性の必要十分条件

一入出力系

rankV=rank[b Ab … A^{n-1}b]=n

多入出力系

rankV=rank[B AB … A^{n-1}B]=n

可観測性の必要十分条件

一入出力系

$$\mathrm{rank\,N} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{n}-1} \end{bmatrix} = \mathrm{n}$$

多入出力系

$$\mathrm{rank\,N} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \\ \vdots \\ \mathrm{CA}^{\mathrm{n}-1} \end{bmatrix} = \mathrm{n}$$

（注）

A の要素から r 個の行と r 個の列をもとに r × r 次行列の行列式を作る。 r +1 の小行列式が全て 0 であり、 r 次の小行列式の中に少なくとも 1 つ 0 でないものがあるならば A の階数は r である。

（例題）

次のシステムの可制御性、可観測性を調べよ

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

（解）

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

小行列式=3−1=2≠0　　　rank V=3 となり可制御

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \\ \mathrm{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

小行列式=1-2=-1≠0　　rank N=3 となり可観測

9.5 極配置

一入出力系

　$u(t)=-\boldsymbol{k}^{T}\boldsymbol{x}(t)+v(t)$　の状態フィードバックにより

　$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{T})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}v(t)$

多入出力系

　$\boldsymbol{u}(t)=-K\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{v}(t)$

　K：m×n 行列　を用いた状態フィードバックの状態方程式は

　$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A-BK)\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{v}(t)$

A が可制御ならば K の操作によって　A-BK の固有値を任意に与えることができる

9.6 状態観測器

一入出力系

$$\begin{cases}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=A\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{b}u(t)+\mathbf{g}\{(y(t)-\hat{y}(t)\} \\ \hat{y}(t)=\mathbf{c}^{T}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{cases}$$

多入出力系では

$$\begin{cases}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=A\hat{\mathbf{x}}(t)+B\mathbf{u}(t)+G\{(\mathbf{y}(t)-\hat{\mathbf{y}}(t)\} \\ \hat{\mathbf{y}}(t)=C\hat{\mathbf{x}}(t)\end{cases}$$

G：n×l 行列

A が可観測ならば G の操作によって　A-GC の固有値を任意に与えることができる