（問題）

1．次の用語についてそれぞれ 200 字程度で説明せよ。

(1) 状態方程式

(2) 状態遷移行列

（解答）

(1)

現代制御理論において、システムを記述するための基礎として用いられるモデル化の方法。古典制御理論では、システムの入出力だけに着目したモデル化を行うのに対し、状態方程式では状態変数を導入することでシステムの内部状態まで含めた記述を行う。状態方程式による表現は、一般に入力$\boldsymbol{u}$と状態ベクトル$\boldsymbol{x}$の関係を規定する状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$ と、状態ベクトル$\boldsymbol{x}$と出力yの関係を記述する出力方程式 $y(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t)$ によって表現される。

(2)

自由応答系の状態方程式

$\dot{x}(t)=Ax(t)$

の解

$x(t)=e^{At}\cdot x_0$

として現れるe^{At}を状態遷移行列という。初期状態x_0にe^{At} を乗ずると任意時刻tの$x(t)$が生成される。e^{At} の値はテイラー展開を用いて、$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}\cdot A^2t^2++\frac{1}{3!}\cdot A^3t^3\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\cdot A^i t^i$ と定義される。

状態遷移行列は以下の性質を持つ。

a） $e^{A0}=I$

b） $e^{At_1}\cdot e^{At_2}=e^{A(t_1+t_2)}$

c） $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

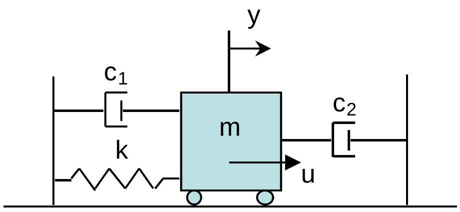
d） $d(e^{At})/dt=Ae^{At}$

（問題）

2. 下図のようなバネ-マス-ダンパ系がある。

(1) このシステムの運動を記述する運動方程式を示せ。ただし物体の質量を m, バネ定数を k、減衰係数を c_1, c_2、外力の入力を u、変位の出力を y とする。

(2) このシステムに対し状態変数を導入し、状態方程式、出力方程式で表せ。



（解答）

(1) 物体について運動方程式で表すと

$$m\ddot{y} = -ky - c_1\dot{y} - c_2\dot{y} + u$$

(2) 状態変数として

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}$$

とおくと、運動方程式から

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \qquad \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{(c_1 + c_2)}{m}\dot{y} + \frac{u}{m} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{(c_1 + c_2)}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

これから次の状態方程式、出力方程式を得る

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（問題）

1.　次の状態方程式で表される制御系の可制御性、可観測性をそれぞれ調べよ。

(1)　$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

(2)　$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

（解答）

(1)　$\mathrm{V} = [\mathrm{b}\ \ \mathrm{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \qquad |N| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$

よって、可制御、可観測

(2)　$\mathrm{V} = [\mathrm{b}\ \ \mathrm{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$|V| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$

よって、非可制御、可観測

（問題）

4. 次の状態方程式で表される制御系の安定性を調べよ。

(1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

(2) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

（解答）

(1)

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

特性方程式の係数は全て正

フルビッツ行列式は

$$H_n = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = 3 > 0 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

よって漸近安定

(2)

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1) + 2(\lambda+1) + (\lambda+2) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 2$$

特性方程式の係数は全て正

フルビッツ行列式は

$$H_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$H_1 = 2 > 0 \qquad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 > 0 \qquad H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

よって漸近安定