10. 乱塊法と分割法

（学習内容）

・乱塊法の特徴と分散分析手順を学ぶ

・分割法の特徴と分散分析手順を学ぶ

10.1 乱塊法

(1) 乱塊法の考え方

（例）

因子 A として水準 A_1,A_2,A_3 を取り上げ、4 回ずつの繰り返し実験を行う。

完全無作為法：全実験の順番をランダムに行う

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
A_1	A_2	A_2	A_3	A_1	A_3	A_2	A_3	A_1	A_2	A_1	A_3	
1			2			3			4			（日）

1 日に 3 回しか実験をできないとすると、日によって実験条件（機械の調子等）が異なる

→1 日の中で 3 つの水準全部の実験を行う

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1→R_1			2→R_2			3→R_3			4→R_4 (ﾌﾞﾛｯｸ)		
A_1	A_3	A_2	A_1	A_2	A_3	A_2	A_3	A_1	A_1	A_3	A_2

乱塊法（randomized block design）：

環境条件が同じブロックを作り、ブロック内で比較したい水準一揃いの実験をランダムに行う

例）実験日、実験場所、実験装置等の違いをブロック化→１つの因子と考える（ブロック因子）

(2) １因子実験の乱塊法

（問題）

反応温度 A（3 水準）を変えて作られる材料の強度を調べる。実験時間がかかるため、ブロックとして実験を行った。

	R_1	R_2	R_3	R_4
A_1	2.75	3.10	2.62	2.41
A_2	2.83	3.16	2.54	2.45
A_3	2.67	2.80	2.43	2.23

繰り返しのない 2 元配置と同じ形

1）データの構造式

$x_{ij}=\mu+\alpha_i+r_j+\varepsilon_{ij}$

因子 A とブロック R との交互作用効果 $(\alpha r)_{ij}$ は考えない

A×R は根拠が明確なく再現性がないため、実験誤差と考える

2) 総平方和の分解

$S_T = S_A + S_R + S_E$

$\phi_T = \phi_A + \phi_R + \phi_E$

3) 分散分析表

要因	平方和 S	自由度 φ	平均平方 V	F_0
A	S_A= 0.10792	ϕ_A=a−1=2	$V_A=S_A/\phi_A$=0.05396	V_A/V_E=12.97**
ﾌﾞﾛｯｸ	S_R= 0.72742	ϕ_R=r−1=3	$V_R=S_R/\phi_R$=0.24247	V_R/V_E=58.29**
E	S_E=0.02495	ϕ_E=6	$V_E=S_E/\phi_E$=0.00416	
計	S_T= 0.86029	ϕ_T= ar−1=11		

F(2,6;0.05)=5.14　F(3,6;0.05)=4.76　F(2,6;0.01)=10.9　F(3,6;0.01)=9.78

反応温度 A は有意、実験条件はブロック間で有意

(3) 2 因子実験の乱塊法

(問題)

反応温度 A（4 水準）と触媒量 B（2 水準）を変えて作られる製品の強度を調べる。実験期間がかかるため、2 回のブロック R に分けて実験を行った。

	B_1	B_2	B_1	B_2
A_1	10.2	11.4	12.1	12.0
A_2	9.0	9.2	8.5	11.6
A_3	9.5	10.6	12.3	11.8
A_4	11.4	11.5	11.8	12.5

1) データの構造式　　$(\alpha r)_{ik}, (\beta r)_{jk}$ は考えない

$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + r_k + \varepsilon_{ijk}$

2) 総平方和の分解

$S_T = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_R + S_E$

$\phi_T = \phi_A + \phi_B + \phi_{A\times B} + \phi_R + \phi_E$

3) 分散分析表

要因	平方和 S	自由度 φ	平均平方 V	F_0
A	S_A=11.392	ϕ_A=a−1=3	$V_A=S_A/\phi_A$=3.797	V_A/V_E=6.32*
B	S_B=2.102	ϕ_B=b−1=1	$V_B=S_B/\phi_B$=2.102	V_B/V_E=3.50
A×B	$S_{A\times B}$=1.173	$\phi_{A\times B}$=(a−1)(b−1)=3	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$=0.391	$V_{A\times B}/V_E$=0.65
ﾌﾞﾛｯｸ	S_R=6.002	ϕ_R=r−1=1	$V_R=S_R/\phi_R$=6.002	V_R/V_E=9.99*
E	S_E=4.208	ϕ_E=(ab−1)(r−1)=7	$V_E=S_E/\phi_E$=0.601	
計	S_T=24.877	ϕ_T=abr−1=15		

F(3,7;0.05)=4.35　F(1,7;0.05)=5.59　F(3,7;0.01)=8.45　F(1,7;0.01)=12.2

反応温度 A は有意、　触媒量 B は有意ではない　実験条件はブロック間で有意

(4) 乱塊法の検定精度

・完全無作為化法：

実験の場の変動を全て誤差と見なす

誤差が大きい

・乱塊法：

実験の場の大きい変動要因をブロック因子とする

誤差が小さい

検定の精度を考える

- 誤差分散 V_E が小さくなる点では、乱塊法は完全無作為化法より検定精度が高い
- 誤差の自由度 ϕ_E が小さくなる点では、乱塊法は完全無作為化法より精度が低い

→ 一般に、誤差の自由度を 10 以上確保できるならば、乱塊法が有利と考える

10.2 分割法

(1) 分割法の考え方

2 つの工程からなる実験において、各工程で因子 A（a 水準）、因子 B（b 水準）を取り上げ、繰り返しのある実験を行う。

因子 A の切り替えに多大な時間と費用がかかる

→A_iB_j ごとに工程 A,B の切り替えを行わず、工程 A_i の出力に対し工程 B(b 水準)の切り替えを行う

A_2 -----> B_2 | B_1

A_1 -----> B_1 | B_2　　互いに独立ではない

A_3 -----> B_1 | B_2

A_2 -----> B_1 | B_2

....

分割法、分割実験（split-plot design）

A：1 次因子、B：2 次因子

全てのデータが互いに独立ではなく、工程 A ごとの誤差（データのばらつき）が存在する

1 次誤差：A_i の実験に含まれる誤差

2 次誤差：A_iB_j の実験に含まれる誤差

1 次因子の繰り返しの方法には、完全無作為化法と乱塊法が考えられる

(2) 完全無作為化法による 1 次因子の繰り返し

1 次因子 A（3 水準）、2 次因子 B（2 水準）とし、繰返し数を r=2 とする。

A の繰り返しを完全無作為化法で行う

A_2-----> B_1 | B_2

A_1-----> B_2 | B_1

A_1-----> B_1 | B_2

A_3-----> B_2 | B_1

A_2-----> B_2 | B_1

A_3-----> B_1 | B_2

1) データの構造式

A_i水準、k番目の繰り返し、B_j水準のデータ

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\varepsilon^1_{ik}+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon^2_{ijk}$

ε^1_{ik} : 1次誤差　　互いに独立に$N(0, \sigma_1^2)$に従う

ε^2_{ijk} : 2次誤差　　互いに独立に$N(0, \sigma_2^2)$に従う

2) 総平方和の分解

$S_T=S_A+S_{E1}+S_B+S_{A\times B}+S_{E2}$　　　(S_{E1} : 1次誤差平方和、S_{E2} : 2次誤差平方和)

$\phi_T=\phi_A+\phi_{E1}+\phi_B+\phi_{A\times B}+\phi_{E2}$

3) 分散分析表

要因	平方和S	自由度φ	平均平方V	F_0
A	S_A	$\phi_A=a-1$	$V_A=S_A/\phi_A$	V_A/V_{E1}
E1	S_{E1}	$\phi_{E1}=a(r-1)$	$V_{E1}=S_{E1}/\phi_{E1}$	(V_{E1}/V_{E2})
B	S_B	$\phi_B=b-1$	$V_B=S_B/\phi_B$	V_B/V_{E2}
A×B	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B}=(a-1)(b-1)$	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B}/V_{E2}$
E2	S_{E2}	$\phi_{E2}=a(b-1)(r-1)$	$V_{E2}=S_{E2}/\phi_{E2}$	
計	S_T	$\phi_T=abr-1$		

(ϕ_{E1}の計算)

・繰り返しの無い3元配置と比較

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+r_k+(\alpha\beta)_{ij}+(\alpha r)_{ik}+(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$

$r_k+(\alpha r)_{ik}+(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$ の $r_k+(\alpha r)_{ik}$がε^1_{ik}、$(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$が$\varepsilon^2_{ijk}$に対応

$\phi_{E1}=\phi_R+\phi_{A\times R}=(r-1)+(a-1)(r-1)=a(r-1)$

$S_{E1}=S_R+S_{A\times R}$

(3) 乱塊法による1次因子の繰り返し

1次因子A (3水準)、2次因子B (2水準) とし、繰返し数をr=2とする。

Aの繰り返しを乱塊法で行う

反復1	A_2-----> B_1 | B_2	反復2	A_1-----> B_1 | B_2
	A_1-----> B_2 | B_1		A_2-----> B_2 | B_1
	A_3-----> B_1 | B_2		A_3-----> B_2 | B_1

1）データの構造式

第k反復でのA_i水準B_j水準のデータ

$x_{ijk}=\mu+r_k+\alpha_i+\varepsilon^1_{ik}+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon^2_{ijk}$

ε^1_{ik}：1次誤差　互いに独立に$N(0,\sigma_1^2)$に従う

ε^2_{ijk}：2次誤差　互いに独立に$N(0,\sigma_2^2)$に従う

2）総平方和の分解

$S_T=S_R+S_A+S_{E1}+S_B+S_{A\times B}+S_{E2}$　（S_{E1}：1次誤差平方和、S_{E2}：2次誤差平方和）

$\phi_T=\phi_R+\phi_A+\phi_{E1}+\phi_B+\phi_{A\times B}+\phi_{E2}$

3）分散分析表

要因	平方和S	自由度ϕ	平均平方V	F_0
R	S_R	$\phi_R=r-1$	$V_R=S_R/\phi_R$	V_R/V_{E1}
A	S_A	$\phi_A=a-1$	$V_A=S_A/\phi_A$	V_A/V_{E1}
E1	S_{E1}	$\phi_{E1}=(a-1)(r-1)$	$V_{E1}=S_{E1}/\phi_{E1}$	(V_{E1}/V_{E2})
B	S_B	$\phi_B=b-1$	$V_B=S_B/\phi_B$	V_B/V_{E2}
A×B	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B}=(a-1)(b-1)$	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B}/V_{E2}$
E2	S_{E2}	$\phi_{E2}=a(b-1)(r-1)$	$V_{E2}=S_{E2}/\phi_{E2}$	
計	S_T	$\phi_T=abr-1$		

（ϕ_{E1}の計算）

・繰り返しの無い3元配置と比較

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+r_k+(\alpha\beta)_{ij}+(\alpha r)_{ik}+(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$

$(\alpha r)_{ik}+(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$ の　$(\alpha r)_{ik}$がε^1_{ik}、$(\beta r)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$が$\varepsilon^2_{ijk}$に対応

$\phi_{E1}=\phi_{A\times R}=(a-1)(r-1)$

$S_{E1}=S_{A\times R}$

(4) 分割法の検定精度

分散分析の精度：誤差分散が小さい、誤差分散の自由度が大きいほどよい

分割法では、誤差分散は1次誤差も2次誤差も小さくなるが誤差分散の自由度も小さくなる

2因子実験の乱塊法と比べると

$\phi_E=(ab-1)(r-1)$　>>　$\phi_{E1}=(a-1)(r-1)$　　オーダーが1つ小さい

>　$\phi_{E2}=a(b-1)(r-1)$　　オーダーは同じ

→1次因子についての検定精度は悪い

2次因子、1次因子と2次因子の交互作用についての検定精度は良い

(例) 因子Aの主効果はどうでもよく、因子Bに主効果、A×Bの交互作用の効果を調べたい場合

→　積極的に分割法を用いる