3. 検定と推定の考え方

（学習内容）

・検定の考え方を学ぶ

・推定の考え方を学ぶ

3.1 検定の考え方

検定（test）：データから母数を推測するための客観的な判定手段

（問題）

10.0cm の部材の長さについて n=10 個の部材をランダムにとって計測したところ、次のデータを得た。

10.4　10.3　10.5　9.8　10.2　10.8　9.9　10.7　10.7　9.7

これから平均値を計算すると $\bar{x}$=10.3 となる。この結果から部材の長さが 10.0cm からずれていると言えるか。

（考え方）

母集団の個々の部材の長さは正規分布に従うと仮定。

簡単のために、分散　$\sigma^2=0.4^2$　が既知であるとする。

$\mu=10.0$ とし $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとしたとき不自然さはないか。

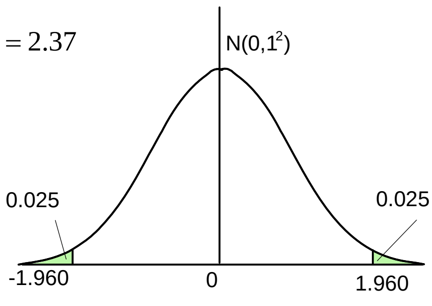
$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ が $N(10.0,\ 0.4^2)$ に従うならば、$\bar{x}$ は $N(10.0,\ 0.4^2/10)$ に従う

標準化すると、$u=(\bar{x}-10.0)/\sqrt{0.4^2/10}$　は $N(0, 1^2)$ に従う

$\bar{x}$=10.30 として u の値を計算すると　$u=(10.3-10.0)/\sqrt{0.4^2/10}=2.37$

これは 1.96 より大きく 0.05 以下の確率でしか起こらない

このことから μ=10.0 の仮定は不自然である



用語

帰無仮説（null hypothesis）H_0:無に帰したい仮説、否定したい仮説

対立仮説（alternative hypothesis）H_1: 帰無仮説に対立する仮説、支持したい仮説

有意水準（level of significance）α ：帰無仮説を捨てる基準にする確率　0.05 0.01

臨界値（critical value）： 有意水準の臨界に対応する検定統計量　1.960 2.576

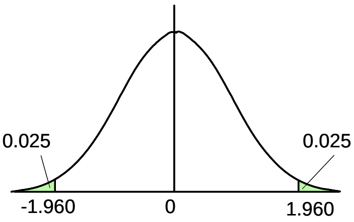
棄却（reject）：帰無仮説が否定されること　「有意水準 5%で有意である」

採択（accept）：帰無仮説が支持されること　「有意でない」

両側検定

帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$に対し、

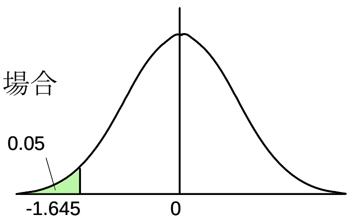
対立仮説 H_1： $\mu \neq \mu_0$の場合

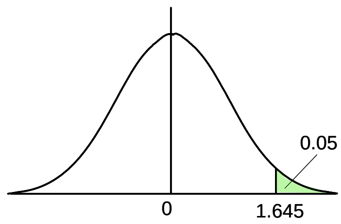


片側検定

帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$に対し、

対立仮説 H_1： $\mu < \mu_0$または$\mu > \mu_0$とする場合





（例）

ある工場で製造される製品の強度はこれまで 10.0kg/cm^{2}であった。製法を変えたら強度が大きくなったかどうか検定する。

検定の手順

1）帰無仮説 H_0　の設定　　「$\mu = \mu_0$が成り立っている」

　対立仮説 H_1　の設定　　「$\mu \neq \mu_0$」「$\mu < \mu_0$」「$\mu > \mu_0$」

2）有意水準αを定める　　0.05（または 0.01）

3）棄却域 R を定める　　「H_1： $\mu \neq \mu_0$ なら $|u_0| \geqq 1.960$（2.576）」

　「H_1： $\mu < \mu_0$ なら $u_0 \leqq -1.645$（-2.326）」

　「H_1： $\mu > \mu_0$ なら $u_0 \geqq$ 1.645（ 2.326）」

4）データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとり、検定統計量 u_0を計算する。

「母平均の検定の場合： $u_0 = \bar{x} - \mu_0 / \sqrt{\sigma_0{}^2 / n}$ 」

5）u_0の値が棄却域にあれば有意と判定し、H_0を棄却する

検定における誤り

第 1 種の誤り（type I error）

帰無仮説が成り立っているにもかかわらずこれを棄却する誤り　確率α

第 2 種の誤り（type II error）

帰無仮説が成り立っていないのにこれを棄却しない誤り　確率β=0〜1−α

		正　解	
		H0	H1
検定結果	H0	**正しい 1-α**	**第2種の誤り β**
	H1	**第1種の誤り α**	**正しい 1-β**

検定結果が H_1：誤りの確率が小さい（α）ので有意であるという積極的表現

H_0：誤りの確率が大きい（β=0〜1−α）ため有意でないという消極的表現

3.2 推定の考え方

推定（estimation）：推測の対象となる母数の値を具体的に数値で示す

(1) 点推定（point estimation）

未知の母数の値をデータから 1 つの値で推定

$\hat{\theta}$:データから計算される統計量、　θ ：母数

$E(\hat{\theta})=\theta$　　となるとき、$\hat{\theta}$ を θ の不偏推定量という（偏りがない　$E(\hat{\theta})-\theta=0$）

（例）$E(\bar{x})=\mu$　より母平均 μ の不偏推定量は $\bar{x}$　←平均値 $\bar{x}$ は $N(\mu, \sigma^2/n)$ の正規分布に従う

$\bar{x}$ が正規分布に従うとき $E(\bar{x})=\mu$　である

これより　$\bar{x}$　は　μ　の不偏推定量

(2) 区間推定（interval estimation）

未知の母数の存在範囲をデータから区間として推定

（例）

$u=(\bar{x}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$　は　$N(0,1^2)$　に従うため、　0.95　の確率で $-1.960 \leqq u \leqq 1.960$

$\Pr\{-1.960 \leqq (\bar{x}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n} \leqq 1.960\}=0.95$

$\bar{x}-1.960\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{x}+1.960\sqrt{\sigma^2/n}$　が得られる推定区間

信頼率：95% の μ の信頼区間（confidence interval）

（例題）

n=9 のデータ　2.8　2.9　2.9　3.1　3.0　2.9　2.9　3.0　2.8

について $H_0: \mu=3.0$、$H_1: \mu<3.0$、$\alpha=0.05$　について検定せよ。ただし、$\sigma^2=0.1^2$　は既知とする。

また μ を区間推定せよ。

（解）

$u=(\bar{x}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/n}=((2.8+2.9+2.9+3.1+3.0+2.9+2.9+3.0+2.8)/9-3.0)/\sqrt{0.1^2/9}$

$=-2.333 < -1.645$

よって有意水準 5%で有意

μ の区間推定は　$2.922-1.960\sqrt{0.1^2/9}$　≦　μ　≦　$2.922+1.960\sqrt{0.1^2/9}$

ゆえに　$2.857 \leqq \mu \leqq 2.988$