4. 母数の検定と推定

（学習内容）

・*t 分布の使い方について理解する*

・*χ^2 分布の使い方について理解する*

4.1 母平均に関する検定と推定

（問題）

10.0cm の部材の長さについて n=10 個のデータをランダムにとって計測したところ次のデータを得た。

10.4　10.3　10.5　9.8　10.2　10.8　9.9　10.7　10.7　9.7

これから平均値を計算すると $\bar{x}=10.30$ となる。この結果から部材の長さが 10.0cm からずれていると言えるか。σ^2 は未知とする。

（考え方）

x が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$\bar{x}$ は $N(\mu,\sigma^2/n)$ に従い、$u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ は $N(0,1^2)$ に従う

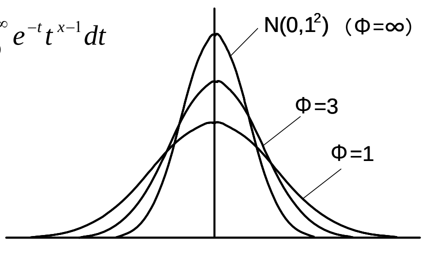
σ^2 が未知なので、$\sigma^2\to V$ と置き換えると、これは正規分布ではなく t 分布に従う

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ が互いに独立に $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{V/n}}$ は自由度 n−1 の t 分布に従う

(1) t 分布

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{\phi+1}{2})}{\sqrt{\phi\pi}\,\Gamma(\frac{\phi}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\phi}\right)^{-\frac{\phi+1}{2}}$$

. . . ガンマ関数　$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$



t 分布のグラフ：

　左右対称、正規分布より低く広がる

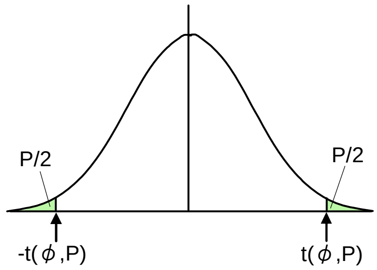
　ϕ により形が決まる

　$\phi=\infty$ のとき $N(0,1^2)$ と一致

t 分布表：

　自由度 ϕ と確率 P から　$P=\Pr\{|t|\geqq t(\phi,P)\}$

　を満たす $t(\phi,P)$ の値を求める



(2) 母平均μの検定手順

1) 帰無仮説 H_0　　　　　　　$\mu=10.0$

　対立仮説 H_1　の設定　　　$\mu\neq 10.0$

2) 有意水準αを定める　　　$\alpha=0.05$

3) 棄却域 R を定める　　　　$|t_0|\geqq t(9,0.05)=2.262$

　　　　　　　　　　　　　　(t_0は自由度$\Phi=9$の t 分布に従う)

4) データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとり、検定統計量t_0を計算する。

$\bar{x}=10.30$

$S=\sum x_i^2-(\sum x_i)^2/n=1062.30-103.0^2/10=1.400$

$V=S/(n-1)=1.400/9=0.1556$

$t_0=(\bar{x}-\mu)/\sqrt{V/n}=(10.3-10.0)/\sqrt{0.1556/10}=2.41$

5) t_0の値が棄却域にあれば有意と判定し、H_0を棄却する

$|t_0|=2.41\geqq t(9,0.05)=2.262$　となりH_0は棄却

(3) 母平均μの推定手順

1) 点推定：$\mu=\bar{x}=10.30$　　　$\leftarrow E(\bar{x})=\mu$

2) 区間推定：

$$-t(9,0.05)\ \leq\ (\bar{x}-\mu)/\sqrt{V/n}\ \leq\ t(9,0.05)$$
$$\bar{x}-t(9,0.05)\sqrt{V/n}\ \leq\ \mu\ \leq\ \bar{x}+t(9,0.05)\sqrt{V/n}$$
$$10.30-2.262\sqrt{0.1556/10}\ \leq\ \mu\ \leq\ 10.30+2.262\sqrt{0.1556/10}$$
$$10.02\ \leq\ \mu\ \leq\ 10.58$$

4.2 母分散に関する検定と推定

(問題)

分散 0.8^2 cm の加工精度の機械を改良し、製造された部材の長さについて n=10 個のデータをランダムにとったところ次のデータを得た。

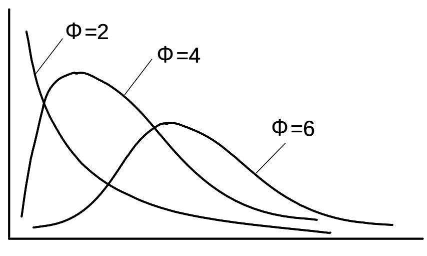
10.4　10.3　10.5　9.8　10.2　10.8　9.9　10.7　10.7　9.7

これから分散σ^2は0.8^2から変わったと言えるか。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が互いに独立に $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、$\chi^2=S/\sigma^2$ は自由度 n-1 のχ^2分布に従う

(1) χ^2分布

$$f(\chi^2)=\frac{1}{2^{\frac{\phi}{2}}\Gamma(\frac{\phi}{2})}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\phi}{2}-1}$$



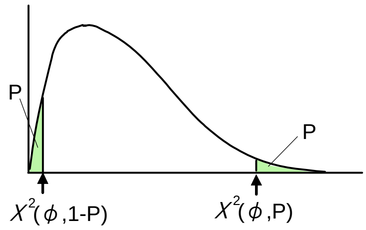
χ^2分布のグラフ：

　左右対称でない

χ^2分布表：

　　自由度ϕと確率Pから　$P=Pr\{\chi^2 \geqq \chi^2(\phi,P)\}$

　　を満たす$\chi^2(\phi,P)$の値を求める



(2) 母分散σ^2の検定手順

1) 帰無仮説H_0　　$\sigma^2=0.8^2$

　対立仮説H_1　の設定　　$\sigma^2 \neq 0.8^2$

2) 有意水準αを定める　　$\alpha=0.05$

3) 棄却域Rを定める　　$\chi^2_0 \leqq \chi^2(9,1-0.025)=2.70$,　$\chi^2_0 \geqq \chi^2(9,0.025)=19.02$

　　(χ^2_0は自由度$\Phi=9$のχ^2分布に従う)

4) データ$x_1,x_2,\cdots,x_n$をとり、検定統計量χ^2_0を計算する。

$$S=\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2/n=1062.30-103.0^2/10=1.400$$

$$\chi^2_0=S/\sigma^2_0=1.400/0.8^2=2.19$$

5) χ^2_0の値が棄却域にあれば有意と判定し、H_0を棄却する

　　$\chi^2_0=2.19 \leqq \chi^2(9,1-0.025)=2.70$　となりH_0は棄却

(3) 母分散σ^2の推定手順

1) 点推定：$\sigma^2=V=S/(n-1)=1.400/9=0.156=0.395^2$　　$E(V)=\sigma^2$

2) 区間推定：

$$\chi^2(9,\ 0.975) \leqq S/\sigma^2 \leqq \chi^2(9,\ 0.025)$$

$$S/\chi^2(9,\ 0.025) \leqq \sigma^2 \leqq S/\chi^2(9,\ 0.975)$$

$$1.400/19.02 \leqq \sigma^2 \leqq 1.400/2.70$$

$$0.074 \leqq \sigma^2 \leqq 0.519$$

$$0.271^2 \leqq \sigma^2 \leqq 0.720^2$$

(例題)

分散0.07mm^{2}の加工精度の仕様の機械で製造された部品をn=12個取り出し寸法を計測したところ、次のデータを得た。

7.02　7.03　6.82　7.08　7.13　6.92　6.87　7.02　6.97　7.08　7.19　7.15 (mm)

分散　$\sigma^2=0.07^2$　と言えるか。

(解)

検定

$H_0: \sigma^2=0.07^2$, $H_1: \sigma^2 \neq 0.07^2$

$\alpha=0.05$　とする

棄却域は　$\chi^2_0 \leqq \chi^2(11,1-0.025)=3.82$,　$\chi^2_0 \geqq \chi^2(11,0.025)=21.9$

データより

$S=\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2/n=592.0666-84.28^2/12=0.1401$

$\chi^2_0=S/\sigma^2_0=0.1401/0.07^2=28.6$

よって　$\chi^2_0=28.6 \geqq \chi^2(11,\ 0.025)=21.9$　となり H_0 は棄却

区間推定

$$\frac{S}{\chi^2(11, 0.025)} \le \sigma^2 \le \frac{S}{\chi^2(11, 1-0.025)}$$

$$\frac{0.1401}{21.9} \le \sigma^2 \le \frac{0.1401}{3.82}$$

$$0.0800^2 \le \sigma^2 \le 0.192^2$$