

8. 二元配置

(学習内容)

- ・交互作用について理解する
- ・二元配置の分散分析法の手順を学ぶ

8.1 二元配置の考え方

二元配置：2つの因子AとBを取り上げ、特性値への影響を調べる分散分析法

得られたデータから、因子A、Bが特性値に影響していると言えるか。またどの条件が最適か。

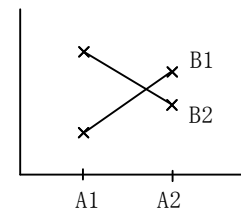
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	平均 $\bar{x}_{i..}$
A ₁	76	77	77	74	76.8
	78	79	78	75	
A ₂	73	75	75	72	73.6
	72	75	73	74	
平均 $\bar{x}_{.j}$	74.8	76.5	75.8	73.8	$\bar{x} = 75.2$

(n: データ総数、a: A の水準数、b: B の水準数、r: 繰返し数)

一元配置で考えると：まずBの条件を固定してAの影響を調べ、次に最適な条件にAを固定してBの影響を調べる

AとBが互いに影響し合う場合は正しくない → 交互作用

因子A、因子B、交互作用A×Bの影響を調べる



(1) データの構造式

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

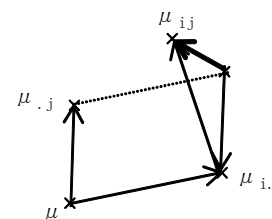
μ : 一般平均 (全ての母平均の平均)

$$\alpha_i : A \text{ の主効果} \quad \sum_{i=1}^a \alpha_i = 0$$

$$\beta_j : B \text{ の主効果} \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$$

$$(\alpha\beta)_{ij} : A \times B \text{ の交互作用効果} \quad \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

ε_{ijk} : 実験誤差、 ε_{ijk} は互いに独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う



(2) 平方和の分解

$$x_{ijk} - \bar{x} = (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})$$

AB によるばらつき 誤差によるばらつき

$$= (\bar{x}_{i..} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}) + (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})$$

A によるばらつき B によるばらつき A×B によるばらつき 誤差によるばらつき

$$\text{総平方和} \quad S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{AB 間平方和} \quad S_{AB} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{A 間平方和} \quad S_A = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = rb \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{B 間平方和} \quad S_B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 = ra \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{A} \times \text{B 間平方和} \quad S_{A \times B} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 = r \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{誤差平方和} \quad S_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$$

$$S_T = S_{AB} + S_E = S_A + S_B + S_{A \times B} + S_E$$

$$S_T \text{ の自由度} \quad \phi_T = n - 1 = abr - 1$$

$$S_{AB} \text{ の自由度} \quad \phi_{AB} = ab - 1$$

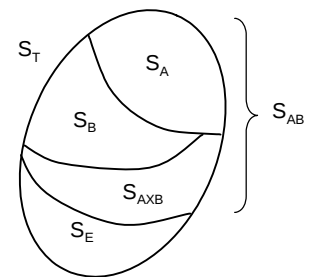
$$S_A \text{ の自由度} \quad \phi_A = a - 1$$

$$S_B \text{ の自由度} \quad \phi_B = b - 1$$

$$S_{A \times B} \text{ の自由度} \quad \phi_{A \times B} = \phi_{AB} - \phi_A - \phi_B = ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$$

$$S_E \text{ の自由度} \quad \phi_E = ab(r - 1)$$

$$\phi_T = \phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B} + \phi_E$$



“Aによるばらつき” “Bによるばらつき” “A×Bによるばらつき” が “誤差によるばらつき”

より大きければ、A、B、A×Bによるばらつきをそれぞれ認める

平均平方（分散）で比較する

$$V_A = S_A / \phi_A \quad V_B = S_B / \phi_B \quad V_{A \times B} = S_{A \times B} / \phi_{A \times B} \quad V_E = S_E / \phi_E$$

$$F_0 = V_A / V_E \quad F_0 = V_B / V_E \quad F_0 = V_{A \times B} / V_E \quad \text{を F 分布に従って検定する}$$

8.2 二元配置分散分析

(1) 分散分析の手順

1) 平方和を求める

$$\text{総平方和} \quad S_T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 (x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2 = 70.44$$

$$\text{A 間平方和} \quad S_A = 2 \cdot 4 \sum_{i=1}^2 (\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = 39.07$$

$$\text{B 間平方和} \quad S_B = 2 \cdot 2 \sum_{j=1}^4 (\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}})^2 = 17.19$$

$$\text{A} \times \text{B 間平方和} \quad S_{A \times B} = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}})^2 = 4.68$$

$$\text{誤差平方和 } S_E = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 = 9.50$$

2) 自由度を求める

$$S_T \text{ の自由度 } \phi_T = n - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$S_A \text{ の自由度 } \phi_A = a - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$S_B \text{ の自由度 } \phi_B = b - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S_{A \times B} \text{ の自由度 } \phi_{A \times B} = (a - 1)(b - 1) = 3$$

$$S_E \text{ の自由度 } \phi_E = ab(r - 1) = 4 \times 2(2 - 1) = 8$$

3) 分散分析表をまとめる

要因	平方和 S	自由度 ϕ	平均平方 V	F_0
A	S_A 39.07	ϕ_A 1	$V_A = S_A / \phi_A$ 39.07	V_A / V_E 32.83 **
B	S_B 17.19	ϕ_B 3	$V_B = S_B / \phi_B$ 5.73	V_B / V_E 4.82 *
A×B	$S_{A \times B}$ 4.68	$\phi_{A \times B}$ 3	$V_{A \times B} = S_{A \times B} / \phi_{A \times B}$ 1.56	$V_{A \times B} / V_E$ 1.31
E	S_E 9.50	ϕ_E 8	$V_E = S_E / \phi_E$ 1.19	
計	S_T 70.44	ϕ_T 15		

$$\text{主効果 A : } F_0 = 32.83 \geq F(1, 8; 0.05) = 5.32$$

$$F_0 = 32.83 \geq F(1, 8; 0.01) = 11.3 \quad 1\% \text{ 有意}$$

$$\text{主効果 B : } F_0 = 4.82 \geq F(3, 8; 0.05) = 4.07$$

$$F_0 = 4.82 < F(3, 8; 0.01) = 7.59 \quad 5\% \text{ 有意}$$

$$\text{交互作用 A} \times \text{B : } F_0 = 1.31 < F(3, 8; 0.05) = 4.07 \quad 5\% \text{ 有意でない}$$

4) プーリング

交互作用 A×B が有意でなかった場合、これを誤差項に繰り入れる → 構造式の変更

構造式変更の判断のために、有意水準 20%での検定を行う

$$\text{交互作用 A} \times \text{B : } F_0 = 1.31 < F(3, 8; 0.20) = 1.951 \quad 20\% \text{ 有意でない}$$

構造式の変更

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

A×B の平方和と自由度を誤差の平方和と自由度に加える

$$S_{E'} = S_{A \times B} + S_E \quad \phi_{E'} = \phi_{A \times B} + \phi_E$$

分散分析表

要因	平方和 S	自由度 ϕ	平均平方 V	F_0
A	S_A 39.07	ϕ_A 1	$V_A = S_A / \phi_A$ 39.07	$V_A / V_{E'}$ 30.29 **
B	S_B 17.19	ϕ_B 3	$V_B = S_B / \phi_B$ 5.73	$V_B / V_{E'}$ 4.45 *
E	$S_{E'}$ 14.18	$\phi_{E'}$ 11	$V_{E'} = S_{E'} / \phi_{E'}$ 1.29	
計	S_T 70.44	ϕ_T 15		

$$\begin{aligned}
\text{主効果 A : } F_0 &= 30.29 \geq F(1, 11; 0.05) = 4.84 \\
F_0 &= 30.29 \geq F(1, 11; 0.01) = 9.65 & 1\% \text{有意} \\
\text{主効果 B : } F_0 &= 4.45 \geq F(3, 11; 0.05) = 3.59 \\
F_0 &= 4.45 < F(3, 11; 0.01) = 6.22 & 5\% \text{有意}
\end{aligned}$$

(2) 分散分析後の推定手順

1) A×B を無視しない場合

データの構造式に基づく

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

最適水準 $\bar{x}_{ij.}$ を比べる $\rightarrow A_1 B_2$

点推定 $\mu_{ij} = \bar{x}_{ij.} = 78.0$

区間推定 母平均の推定

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{ij.} - t(\phi_E, \alpha) \sqrt{V_E / r} &\leq \mu_{ij} \leq \bar{x}_{ij.} + t(\phi_E, \alpha) \sqrt{V_E / r} \\
78.0 - t(8, 0.05) \sqrt{1.19 / 2} &\leq \mu_{12} \leq 78.0 + t(8, 0.05) \sqrt{1.19 / 2} \\
76.2 \leq \mu_{12} &\leq 79.8
\end{aligned}$$

2) A×B を無視する場合

データの構造式に基づく

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

最適水準 A については $\bar{x}_{i..}$ を比べ、B については $\bar{x}_{.j.}$ を比べる $\rightarrow A_1, B_2$

点推定 $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j = \mu + \alpha_i + \mu + \beta_j - \mu = \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}} = 76.8 + 76.5 - 75.2 = 78.1$

区間推定

$$(\bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}) - t(\phi_{E'}, \alpha) \sqrt{V_{E'} / r_e} \leq \mu_{ij} \leq (\bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}) + t(\phi_{E'}, \alpha) \sqrt{V_{E'} / r_e}$$

r_e : 有効反復数 $r_e = n / (a+b-1)$ ←田口の式

平均値が何個分のデータから計算されたものと等価か

$$r_e = \frac{\text{全データ数}}{\text{無視しない要因の自由度の和} + 1} = \frac{n}{(a-1) + (b-1) + 1} = \frac{n}{a+b-1}$$

$$\begin{aligned}
78.1 - t(11, 0.05) \sqrt{1.29 / (16 / 5)} &\leq \mu_{12} \leq 78.1 + t(11, 0.05) \sqrt{1.29 / (16 / 5)} \\
76.7 \leq \mu_{12} &\leq 79.5
\end{aligned}$$