9. 多元配置

（学習内容）

・多元配置の分散分析の手順を学ぶ

・繰り返しのある場合とない場合の手順の違いを理解する

因子を３つ以上取り上げ、因子の水準間組合せ全部の実験を行う場合
→多元配置（3 元配置、4 元配置 ...）

9.1 繰り返しのある３元配置

因子 A（a 水準）、B（b 水準）、C（c 水準）の各水準組合せで r 回ずつの繰り返し実験を行う方法

(1) データの構造式

$x_{ijkl}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k+(\alpha\beta)_{ij}+(\alpha\gamma)_{ik}+(\beta\gamma)_{jk}+(\alpha\beta\gamma)_{ijk}+\varepsilon_{ijkl}$

μ ：一般平均

α_i：A の主効果

β_j：B の主効果

γ_k：C の主効果

$(\alpha\beta)_{ij}$：A×B の交互作用効果

$(\alpha\gamma)_{ik}$：A×C の交互作用効果

$(\beta\gamma)_{jk}$：B×C の交互作用効果

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$：A×B×C の交互作用効果

ε_{ijkl}：実験誤差

(2) 平方和の分解

データの構造式に対応し、総平方和は次のように分解できる

$S_T=S_A+S_B+S_C+S_{A\times B}+S_{A\times C}+S_{B\times C}+S_{A\times B\times C}+S_E$

平方和の計算方法

・修正項　CT=(全データの和)^2/全データの個数

・総平方和　S_T=(個々のデータの 2 乗の和)-CT

・1 つの因子の平方和（A 間平方和）

S_A=(A_1 のデータの和)^2/A_1 のデータ個数＋(A_2 のデータの和)^2/A_2 のデータ個数
＋…＋(A_a のデータの和)^2/A_a のデータ個数-CT

・2 つの因子の平方和（AB 間平方和）

S_{AB}=(A_1B_1 のデータの和)^2/A_1B_1 のデータ個数＋(A_1B_2 のデータの和)^2/ A_1B_2 のデータ個数
＋…＋(A_aB_b のデータの和)^2/A_aB_b のデータ個数-CT

・交互作用平方和（A×B 平方和）

$S_{A\times B}=S_{AB}-S_A-S_B$

・3 つの因子の平方和（ABC 間平方和）

S_{ABC}=($A_1B_1C_1$ のデータの和)^2/$A_1B_1C_1$ のデータ個数＋($A_1B_1C_2$ のデータの和)^2/$A_1B_1C_2$ のデータ個数＋…＋($A_aB_bC_c$ のデータの和)^2/$A_aB_bC_c$ のデータ個数-CT

・交互作用平方和（A×B 平方和）

$S_{A\times B\times C}=S_{ABC}-S_A-S_B-S_C-S_{A\times B}-S_{A\times C}-S_{B\times C}$

・誤差平方和

$S_E=S_T-S_A-S_B-S_C-S_{A\times B}-S_{A\times C}-S_{B\times C}-S_{A\times B\times C}$

(3) 自由度

$\phi_T=n-1=abcr-1$

$\phi_A=a-1$　　$\phi_B=b-1$　　$\phi_C=c-1$

$\phi_{A\times B}=(a-1)(b-1)$　　$\phi_{A\times C}=(a-1)(c-1)$　　$\phi_{B\times C}=(b-1)(c-1)$　　$\phi_{A\times B\times C}=(a-1)(b-1)(c-1)$

$\phi_E=abc(r-1)$　　　（$\leftarrow \phi_E=\phi_T-\phi_A-\phi_B-\phi_C-\phi_{A\times B}-\phi_{A\times C}-\phi_{B\times C}-\phi_{A\times B\times C}$）

$\phi_T=\phi_A+\phi_B+\phi_C+\phi_{A\times B}+\phi_{A\times C}+\phi_{B\times C}+\phi_{A\times B\times C}+\phi_E$

(4) 分散分析表をまとめる

要因	平方和 S	自由度 φ	平均平方 V	F_0
A	S_A	$\phi_A=a-1$	$V_A=S_A/\phi_A$	V_A/V_E
B	S_B	$\phi_B=b-1$	$V_B=S_B/\phi_B$	V_B/V_E
C	S_C	$\phi_C=c-1$	$V_C=S_C/\phi_C$	V_C/V_E
A×B	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B}=(a-1)(b-1)$	$V_{A\times B}=S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B}/V_E$
A×C	$S_{A\times C}$	$\phi_{A\times C}=(a-1)(c-1)$	$V_{A\times C}=S_{A\times C}/\phi_{A\times C}$	$V_{A\times C}/V_E$
B×C	$S_{B\times C}$	$\phi_{B\times C}=(b-1)(c-1)$	$V_{B\times C}=S_{B\times C}/\phi_{B\times C}$	$V_{B\times C}/V_E$
A×B×C	$S_{A\times B\times C}$	$\phi_{A\times B\times C}=(a-1)(b-1)(c-1)$	$V_{A\times B\times C}=S_{A\times B\times C}/\phi_{A\times B\times C}$	$V_{A\times B\times C}/V_E$
E	S_E	$\phi_E=abc(r-1)$	$V_E=S_E/\phi_E$	
計	S_T	$\phi_T=abcr-1$		

9.2 繰り返しのない 3 元配置

因子 A（a 水準）、B（b 水準）、C（c 水準）の各水準組合せをそれぞれ 1 回ずつ行う実験方法

繰り返しのデータが無いため、3 因子交互作用（$S_{A\times B\times C}$）と誤差（S_E）の区別がつかない

交互作用効果と誤差が交絡している

→交互作用が存在しない場合に用いられる

→多元配置の問題では交互作用効果が小さくなるため、繰り返しの無い実験を行うことができる

(1) データの構造式

$x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k+(\alpha\beta)_{ij}+(\alpha\gamma)_{ik}+(\beta\gamma)_{jk}+\varepsilon_{ijk}$

(2) 平方和の分解

$S_T = S_A + S_B + S_C + S_{A\times B} + S_{A\times C} + S_{B\times C} + S_E$

$\phi_T = \phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_{A\times B} + \phi_{A\times C} + \phi_{B\times C} + \phi_E$

(3) 分散分析表をまとめる

要因	平方和 S	自由度 φ	平均平方 V	F_0
A	S_A	$\phi_A = a-1$	$V_A = S_A/\phi_A$	V_A/V_E
B	S_B	$\phi_B = b-1$	$V_B = S_B/\phi_B$	V_B/V_E
C	S_C	$\phi_C = c-1$	$V_C = S_C/\phi_C$	V_C/V_E
A×B	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B} = (a-1)(b-1)$	$V_{A\times B} = S_{A\times B}/\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B}/V_E$
A×C	$S_{A\times C}$	$\phi_{A\times C} = (a-1)(c-1)$	$V_{A\times C} = S_{A\times C}/\phi_{A\times C}$	$V_{A\times C}/V_E$
B×C	$S_{B\times C}$	$\phi_{B\times C} = (b-1)(c-1)$	$V_{B\times C} = S_{B\times C}/\phi_{B\times C}$	$V_{B\times C}/V_E$
E	S_E	$\phi_E = (a-1)(b-1)(c-1)$	$V_E = S_E/\phi_E$	
計	S_T	$\phi_T = abc-1$		

(例題)

次のデータについて分散分析を行え

		C1	C2
A_1	B1	77.5	64.0
	B2	83.0	83.0
A2	B1	90.0	75.0
	B2	80.5	86.0
A3	B1	71.0	66.5
	B2	65.0	64.5

(解)

分散分析表をまとめる

要因	平方和 S	自由度 φ	平均平方 V	F_0
A	531.375	2	265.69	15.50
B	27.000	1	27.00	1.57
C	65.333	1	65.33	3.81
A×B	139.625	2	69.81	4.07
A×C	9.042	2	4.52	0.26
B×C	120.333	1	120.33	7.02
E	34.292	2	17.15	
計	927	11		

F(2,2;0.05)=19.0　F(1,2;0.05)=18.5

F(2,2;0.01)=99.0　F(1,2;0.01)=98.5

F(2,2;0.20)=4.000　F(1,2;0.20)=3.556

と比べる
A×C は20%有意でない→A×C を誤差にプーリング
分散分析表を修正

要因	平方和 S	自由度φ	平均平方 V	F_0
A	531.375	2	265.69	24.53**
B	27.000	1	27.00	2.49
C	65.333	1	65.33	6.03
A×B	139.625	2	69.81	6.44
B×C	120.333	1	120.33	11.11*
E'	43.333	4	10.83	
計	927	11		

F(2,4;0.05)=6.94　F(1,4;0.05)=7.71
F(2,4;0.01)=18.0　F(1,4;0.01)=21.2
と比べる
A は1%有意，B×C は5%有意

9.3 多重比較法

3種類の製品の強度を調べ次のデータを得た。これより製品間で強度に差があると言えるか。

製品				
A1	5	7	4	8
A2	8	10	9	
A3	5	3	1	

一元配置分散分析の結果、製品間で差があるという結果を得た。
次にどの製品間で差があるか調べるため、A1 と A2、A1 と A3、A2 と A3 の間でそれぞれ t 検定を行った。
「A1 と A2 の間で～」、「A1 と A2 の間で～」、「A1 と A2 の間で～」の3つのことを同時に言おうとすると正しい確立は

$$0.95\times0.95\times0.95=0.86$$

これを0.95にするように各差の検定に対し、厳しい有意水準で検定を行う必要がある。
→　多重比較法
有意水準

$$\alpha'=\frac{\alpha}{k(k-1)/2}=\frac{0.05}{3(3-1)/2}=0.0167$$

k: 水準の数