（問題）

1. 次の用語についてそれぞれ 200 字程度で説明せよ。

(1) 帰無仮設

(2) Student の t 検定

（解答）

(1) 帰無仮設

検定において、最終的に否定したい仮説を帰無仮説と言う。検定では、帰無仮説の仮定のもとで検定統計量を計算し、対応する確率密度分布と比較して棄却域に入るかどうかで有意であるかどうかどうかを判定する。例えば、平均値の比較を行う t 検定では、２つの母集団分布の平均を等しいと仮定し、分散の比に関するＦ検定では、２つの母集団分布の分散を等しいと仮定して検定を行う。

(2) Student の t 検定

２つの母平均の差の検定を行う際に、両者に等分散を仮定できる場合に行う検定方法である。

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$　と仮定し、σ^2 の推定値をデータから計算される分散値 V とおくと

$$V=\frac{S_1+S_2}{(n-1)+(m-1)}$$

とすることができる

検定統計量は

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{V\cdot(1/n+1/m)}}$$

は自由度 n+m−2 の t 分布に従うものとして検定を行う。

（問題）

2. 正規分布表、t 分布表、χ^2分布表、F 分布表を用いて、以下の値を求めよ。

(1) u が $N(0,1^2)$に従うとき、$Pr\{0.00 \leqq u \leqq 1.75\}$

(2) x が $N(3,2^2)$に従うとき、$Pr\{x \geqq 3.60\}$

(3) $\chi^2(17,\ 0.025)$

(4) $t(8,\ 0.05)$

(5) $F(9,10;\ 0.975)$

（解答）

(1) $Pr\{0.00 \leqq u \leqq 1.75\} = Pr\{0.00 \leqq u\} - Pr\{1.75 \leqq u\} = 0.5000 - 0.0401 = 0.4599$

(2) $Pr\{x \geqq 3.60\} = Pr\{(x-3)/2 \geqq (3.60-3)/2\} = Pr\{u \geqq 0.30\} = 0.3821$

(3) $\chi^2(17,\ 0.025) = 30.2$

(4) $t(8,\ 0.05) = 2.306$

(5) $F(9,10;\ 0.975) = 1/F(10,9;\ 0.025) = 1/3.96 = 0.2525$

（問題）

3. ２種類の方法で作られた部品の強度について次のデータを得た。ＡとＢのデータ群の間には等分散が仮定できるとして、母平均に差があると言えるか t 検定を行え。また有意と判定されたときは、母平均の差について推定を行うこと。

A：	20	15	16	15	20	18	19
B：	13	15	16	10	17	15	

(kg/cm^2)

（解答）

(1) Student の t 検定を行う

1) 帰無仮説　H_0：$\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$　とする

2) 有意水準　$\alpha=0.05$　とする

3) 棄却域 R は

$$|t_0| \geqq t(7+6-2,\ 0.05) = t(11,\ 0.05) = 2.201$$

4) データから検定統計量 t_0 を計算すると

$$\bar{x}_1 = (20+15+16+15+20+18+19)/7 = 17.57$$
$$\bar{x}_2 = (13+15+16+10+17+15)/6 = 14.33$$
$$S_1 = \sum(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 29.71$$
$$S_2 = \sum(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 31.33$$
$$V = (S_1 + S_2)/(n+m-2) = (29.71+31.33)/11 = 5.55$$

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{V(1/n+1/m)}} = \frac{(17.57-14.33)}{\sqrt{5.55(1/7+1/6)}} = 2.47$$　　2.52

5) t_0 が棄却域にあれば有意と判定し、H_0 を棄却

$|t_0|=2.47 \geqq t(11, 0.05)=2.201$　となり H_0 は棄却

(2) 母平均の差の推定は

1) 点推定：　$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 17.57 - 14.33 = 3.24$

2) 区間推定：

$$-t(11,\ 0.05) \le \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V(1/n+1/m)}} \le t(11,\ 0.05)$$
$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t(11,\ 0.05)\sqrt{V(1/n+1/m)} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t(11,\ 0.05)\sqrt{V(1/n+1/m)}$$
$$3.24 - 2.201\sqrt{5.55(1/7+1/6)} \le \mu_1 - \mu_2 \le 3.24 + 2.201\sqrt{5.55(1/7+1/6)}$$
$$0.35 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6.12$$

0.42　　　6.18

（問題）

4. ２種類の方法で作られた製品の強度について次のデータを得た。ＡとＢのデータ群の間で母分散に違いがあると言えるかＦ検定を行え。また有意と判定されたときは、母分散の比について推定を行うこと。

Ａ：　3.0　2.0　4.5　3.5　7.0

Ｂ：　3.0　4.5　4.0　3.5　4.0　　(kg/cm²)

（解答）

(1) 母分散の比の検定を行う

1) 帰無仮説　H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　　対立仮説 H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$　とする

2) 有意水準　$\alpha=0.05$　とする

3) 棄却域Ｒは　$F_0 \leqq F(4,4;1-0.025)=1/F(4,4;0.025)=1/9.96=0.10$

$F_0 \geqq F(4,4;0.025)=9.60$

4) データから検定統計量 F_0 の値を計算する

$S_1=\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2=14.50$

$S_2=\Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2=1.30$

$V_1=S_1/(n-1)=14.50/4=3.625$

$V_2=S_2/(m-1)=13.30/4=0.325$

$F_0=V_1/V_2=3.625/0.325=11.154$　　F_0 は自由度(4,4)のＦ分布に従う

5) F_0 が棄却域にあれば有意と判定し、H_0 を棄却

$F_0=11.154 \geqq F(4,4;\ 0.025)=9.60$　となり H_0 は棄却

(2) 母分散の比の推定は

1) 点推定：　$\sigma_1^2/\sigma_2^2=V_1/V_2=3.625/0.325=11.154$

2) 区間推定：

$F(\phi_1,\ \phi_2;1-\alpha/2) \leqq\ (V_1/\sigma_1^2)/(V_2/\sigma_2^2)\ \leqq F(\phi_1,\ \phi_2;\ \alpha/2)$

$V_1/V_2 \cdot 1/F(\phi_1,\ \phi_2;\ \alpha/2) \leqq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leqq V_1/V_2 \cdot 1/F(\phi_1,\ \phi_2;1-\alpha/2)$

$V_1/V_2 \cdot 1/F(\phi_1,\ \phi_2;\ \alpha/2) \leqq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leqq V_1/V_2 \cdot F(\phi_2,\ \phi_1;\ \alpha/2)$

$11.154/F(4,4;0.025) \leqq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leqq 11.154 \cdot F(4,4;0.025)$

$1.162 \leqq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leqq 107.077$