Q 値

牧野 泰才

平成 19 年 7 月 10 日

1　Q 値の定義

本稿では “Q 値 (Q-factor)” について説明する。Q 値とは、共振する系の振動の持続特性を表す量である。これは同時に、その系の周波数特性の半値幅に対応する量である。そこで Q 値を考える前に、まず共振系について考える。

ある共振系にパルス状の信号が入力された場合を考える。完全に内部損失が無い共振系では、その系の持つ共振周波数成分の振動が持続される。このように振動が持続しているときには、2 つの物理量の間でエネルギーが交換されながら振動が維持される。例えばバネ-マス系で考えると、速度が最大となる瞬間には、$\frac{1}{2}mv^2$ の運動エネルギーとしてエネルギーが保持される。一方、変位が最大となる瞬間には、$\frac{1}{2}kx^2$ のポテンシャルエネルギー (バネの弾性エネルギー) としてエネルギーが保持される。この 2 つの状態が交互に生じることで振動が維持される。

これは他の共振系においても同様である。LC 共振回路では、電流最大となる瞬間にはコイル内に誘電エネルギーとして $\frac{1}{2}LI^2$ が蓄えられ、電圧最大となる瞬間にはコンデンサ間に静電エネルギーとして $\frac{1}{2}CV^2$ が蓄えられる。この 2 つのエネルギー間でやり取りを繰り返しながら共振が維持される。同様にして、電磁波においては電界 E と磁界 B のペア、音響信号においては、体積速度と音圧のペアで考えればよい。

このように完全に内部損失の無い系においては、最初に印加されたエネルギーがロスすることなく内部で交換され続けるので、振動は永久に終わることがない。

次に損失のある場合を考える。この場合には振動が永久に持続することは無い。例えば LCR の共振回路であれば、抵抗の部分で損失が生じるために、振動の振幅は指数関数的に減少する (詳細は次章)。

この振動が、どれくらい長い間持続するかという指標として、以下の値を考える。

$$q = \frac{\text{ある瞬間に系に蓄えられているエネルギー}}{\text{一周期の間に系から散逸するエネルギー}}$$

ここで分子は、ある瞬間にコイルとコンデンサにそれぞれ蓄えられているエネルギーの和である。電流最大の瞬間に着目すれば、コイルに蓄えられるエネルギーのみで、電圧最大の瞬間にはコンデンサの静電容量のみでそれぞれ表される。それに対して分母に対応する量は、その瞬間から一周期の間に抵抗で消費されジュール熱として散逸されるエネルギーである。Q 値の定義はこの q に 2π をかけた値である。

$$Q = 2\pi\frac{\text{ある瞬間に系に蓄えられているエネルギー}}{\text{一周期の間に系から散逸するエネルギー}} \tag{1}$$

例えば $q = 2$ という場合には、1 周期の間に振動のエネルギーの半分が、熱として消費されてしまうということを意味する。逆に、Q 値が大きい場合には振動のエネルギーロスが小さく、振動が持続するために振動振幅の減衰は緩やかになる。この関係は、完全に損失の無い場合には分母が 0 となるために Q が無限大になる、ということからも理解しやすい。なお $Q = 1/2$ の場合は臨界制動状態であり、もはや振動現象とは呼べず、$Q < 1/2$ の時には過減衰となる。(後に詳述)

これより、LCR の直列共振回路を例に具体的に話を進める。

2　直列共振回路

2.1　LC 共振回路 (損失なし)

まず LC の直列共振回路を考える (図 1)。この回路の AB 間のインピーダンスは

$$Z = \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \tag{2}$$

で表される。ここで印加される周波数 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ のとき、すなわち、

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \tag{3}$$

のとき、インピーダンス Z は 0 になる。このときには、$V_0 = ZI$ の関係より、有限の V_0 に対して無限大の電流 I が流れることを意味する。

これは何を意味しているのか? そこで電流に対する電圧の位相を考える。コイルにおいては、電流に対して電圧の位相が 90 °進む。一方コンデンサの電圧は位相が 90 °遅れる。よってこれら 2 つは 180 °ずれることになり逆向きの電圧が生じている。$\omega L = 1/\omega C$ を満たす場合には、コイルによって変動した分の電圧が、コンデンサの部分で同じだけ逆向きに変動するので、AB 間の電位差はほとんど無くなる。その結果大量の電流が流れることになる。

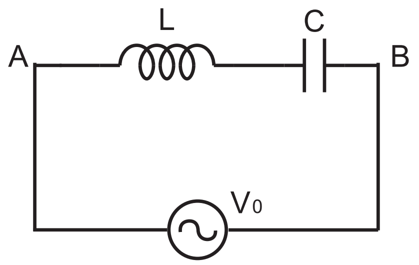

図 1: LC 直列共振回路

2.2 LCR 共振回路 (損失あり)

しかし実際には、銅線部の抵抗や電源部分の内部抵抗など、抵抗成分が直列に接続されたモデルとして考えるのが妥当である。そこで、図 2 のような LCR の直列共振回路を考える。このときのインピーダンス Z は

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \tag{4}$$

であるから、$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ のときには $Z = R$ となる。このため、電流 I は $\frac{V_0}{R}$ で頭打ちとなる。

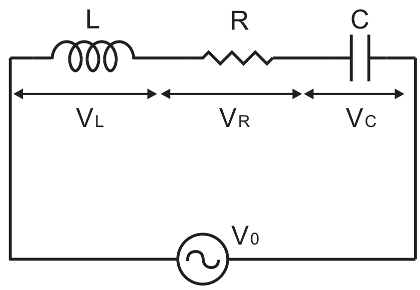

図 2: LCR 直列共振回路

Q 値

このとき、Q 値はどれくらいだろうか? ここで L に蓄えられるエネルギーを考えると、

$$\begin{aligned} W_L &= \int_0^T v(t)i(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T i(t)L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= L\int_0^{I_p} i\mathrm{d}i \\ &= \frac{1}{2}LI_p^2 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、最大のエネルギーを与える振幅は、電流の実効値を I_{rms} とすると $I_p = \sqrt{2}I_{rms}$ で与えられるから、結局最大に蓄えられるエネルギーは

$$W_L = LI_{rms}^2 \tag{6}$$

である。

一方、抵抗で一周期の間で消費されるエネルギーは

$$W_R = RI_{rms}^2 T_0 \tag{7}$$

したがって、蓄えられる最大のエネルギーと、消費されるエネルギーの比は、

$$q = \frac{LI_{rms}^2}{RI_{rms}^2 T_0} = \frac{L}{RT_0} \tag{8}$$

なので、

$$Q = 2\pi q = 2\pi\frac{L}{RT_0} = \frac{\omega_0 L}{R} \tag{9}$$

となる。これが直列共振回路の Q 値となる。

次に、コンデンサ C に蓄えられる最大のエネルギーについて考える。コイルとコンデンサとの間でエネルギーを交換することで共振が維持されることから、コンデンサに蓄えられるエネルギーはコイルに蓄えられ

るエネルギーと同じはずである。コイルの場合と同様にエネルギーを考えると、

$$\begin{aligned} W_C &= \int_0^T v(t)i(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T v(t)C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{t} \\ &= C\int_0^{V_p} v\mathrm{v} \\ &= \frac{1}{2}CV_p^2 = CV_{rms}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで最大の電圧 $V_p = \sqrt{2}V_{rms}$ であることを利用した。$V_{rms} = \frac{I_{rms}}{\omega_0 C}$ であるから、

$$Q = 2\pi\frac{CV_{rms}^2}{I_{rms}^2 RT_0} = \frac{2\pi}{T_0}\frac{C\frac{I_{rms}^2}{\omega_0^2 C^2}}{I_{rms}^2 R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \tag{11}$$

と表される。今 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であることを思い出せば、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 CR} \tag{12}$$

であり、どちらの表記も同じであることが分かる。

各素子の両端の電位差をそれぞれ V_L, V_R, V_C とする。ここで、電流 I が共通であることから、$I = \frac{V_R}{R} = \frac{V_L}{\mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}\omega CV_C$ の関係があるので、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{|V_L|}{|V_R|} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{|V_C|}{|V_R|} \tag{14}$$

というように解釈することも出来る。すなわち Q 値は、コイル (あるいはコンデンサ) の両端に生じている電圧と、抵抗の両端に生じている電圧の比を表す。例えば Q 値が 1000 であれば、コイルの両端には V_0 の 1000 倍の電圧が生じていることになる。なお共振条件の時には $V_L = -V_C$ であったことに注意が必要。この 1000 倍の電圧は電圧源から供給される訳では無く、コイルで電位が上がった分だけ、コンデンサで下げられることになっている。

減衰項との関係

次に、この Q 値は振動の減衰に関係する量であることを示す。

$$\begin{aligned} V_0 &= V_L + V_R + V_C \\ &= L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + V_C \end{aligned} \tag{15}$$

であり、$I = C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t}$ の関係があるから、

$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 V_c}{\mathrm{d}t^2} + CR\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + V_c \tag{16}$$

という 2 階の微分方程式が得られる。まず定常解としては、直流回路とみなして、

$$V_C = V_{DC} \tag{17}$$

が得られる。これはこの微分方程式の特解である。

過渡項に関しては、この方程式の斉次解 ($V_0 = 0$ の解) で与えられる。すなわち、解の形を

$$V_C = V_0 \exp(st) \tag{18}$$

と仮定した場合の特性方程式

$$LCs^2 + CRs + 1 = 0 \tag{19}$$

を満たす s を求めれば、系の振動特性が得られる。

$$s = \frac{-CR \pm \sqrt{C^2R^2 - 4LC}}{2LC} \tag{20}$$

s が実数の場合には減衰解しか存在しないため、この系は振動的にはならない。一方 s が複素数の場合、すなわち $C^2R^2 - 4LC < 0$ の場合に解は

$$V_C = V_0 \exp(-\frac{R}{2L}t)\cdot\exp(\pm\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t) \tag{21}$$

なので、$-\frac{R}{2L}$ が減衰を表す項になり、$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ が振動を表す項になる。

減衰項 $\gamma = \frac{R}{2L}$ に着目すると、先ほど算出した Q 値とは、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \tag{22}$$

の関係がある。これは、

$$Q = \frac{2\pi f_0}{2\gamma} = \frac{\tau}{T_0} \tag{23}$$

というように書き直すことも出来る。ここで $\tau = \frac{\pi}{\gamma}$ であり、振幅が $\mathrm{e}^{-\pi}$ に落ちるまでの時間を表す。一方 $T_0 = \frac{1}{f_0}$ は振動の周期を意味する。つまり Q 値は振動の振幅が $\mathrm{e}^{-\pi}$ に減衰するまでの時間と (このときエネルギーでは $\mathrm{e}^{-2\pi} \sim 1/535$)、1 周期の時間との比率を表すことになる。これは τ 秒までの間に何周期分振動成分が含まれるかを意味する。

なお、微分方程式の解より明らかなように、$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ の場合には、共振周波数は少しずれる。しかし例

えば $\frac{1}{LC} = \frac{9R^2}{4L^2}$ の場合、すなわち周波数の補正項が 9 分の 1 の場合、Q 値は 3/2 と算出される。先ほどの関係から考えれば、この場合は振動成分は 1.5 周期分程度しか含まれない。つまりこの系は振動的とは言いがたい。なお、このとき周波数は $\sqrt{8/9} \sim 0.94$ 程度ずれる。そのため振動現象を考える場合に、$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ の場合を仮定するのは妥当である。

蛇足ではあるが、$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ のとき微分方程式は重根を持つことから臨界制動状態となる。このときの Q 値は最初にも述べたが 1/2 である。$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ のときには Q<1/2 であり過減衰となる。

半値幅との関係

周波数が固有周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ の時に、電流は最大値 V_0/R を取る。では異なる周波数の入力に対して、電流はどのように振舞うだろうか?

$$I = \frac{V_0}{R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \tag{24}$$

を以下の変数を用いて書き直す。

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (25) \\ Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \quad (26) \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad (27) \end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_0}{R}\frac{1}{1 + \mathrm{j}(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC})} \\ &= \frac{V_0}{R}\frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega_0 L}{R}(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \\ &= \frac{V_0}{R}\frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\Omega} \quad (28) \end{aligned}$$

と表される。絶対値で考えれば、

$$|I| = \frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + (Q\Omega)^2}} \tag{29}$$

であり、$\frac{1}{\sqrt{1+(Q\Omega)^2}}$ の部分が周波数特性を与える。ここで電流が最大になる場合は明らかに $\Omega = 0$ のときである。すなわち、$\omega = \omega_0$ のときであり、これは当初考えていたとおりの結果といえる。なお ω として正負 2 つの解が出てくるが、正の方のみを採用することにして差し支えない。

では、$(Q\Omega)^2 = 1$ となる ω はどれくらいだろうか? これはすなわち電流の絶対値が $1/\sqrt{2}$ となる周波数である。このとき、

$$\omega^2 \mp Q^{-1}\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0 \tag{30}$$

という 2 本の 2 次方程式が得られる。この解はそれぞれ 2 個ずつの正負の値を与えるが、正の方のみを採用することにする。復号が $+$ の場合には、

$$\omega_1 = \frac{-Q^{-1}\omega_0 + \sqrt{Q^{-2}\omega_0^2 + 4\omega^2}}{2} \tag{31}$$

$-$ の場合には、

$$\omega_2 = \frac{Q^{-1}\omega_0 + \sqrt{Q^{-2}\omega_0^2 + 4\omega^2}}{2} \tag{32}$$

である。この 2 つの周波数が電流振幅が $1/\sqrt{2}$ となる周波数を与える。この 2 つの周波数の差が半値幅であるからこれを求めると、

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \tag{33}$$

すなわち、

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{34}$$

である。Q 値が大きいときには、$\Delta\omega$ が小さいことを意味するので、非常に急峻な周波数特性となる。また、$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ を思い出せば、直列共振回路の半値幅は

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \tag{35}$$

で決定されることも分かる。

3　並列共振回路と双対性

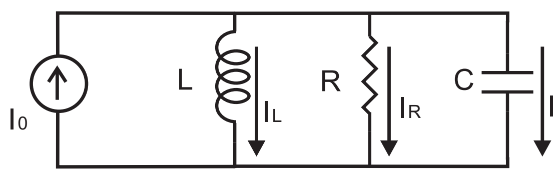

図 3: LCR 並列共振回路

これまでは直列共振回路を考えてきた。では、並列共振回路場合にはどのように考えればよいか? 図 3 の

ような並列共振回路を考える。このときのインピーダンスは

$$Z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} \tag{36}$$

と表される。ここでアドミタンス $Y = 1/Z$ を考える。

$$Y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C \tag{37}$$

この表現は直列共振回路におけるインピーダンスの表現と等価である。ただし、L と C を入れ替え R を 1/R に置き換えたものである。またこのときは、電流と電圧の関係が直列共振回路の場合とは逆になっている。したがって、以下の変数の入れ替えを行うことで、直列共振回路の議論をそのまま用いることが可能になる。

電圧源	電流源
電流	電圧
抵抗	コンダクタンス
リアクタンス	サセプタンス
開放	短絡

このように、ある変換により A ⇒ B、B ⇒ A が相互に置き換えることができ、A と B が本質的に同一の概念として扱える場合に「A と B は双対である」と言う。

Q 値について考えれば、$R \Rightarrow 1/R$、$L \Leftrightarrow C$ となることに注意すれば、並列共振回路の Q 値は

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{38}$$

となる。

並列共振系では、対応する周波数においてアドミタンスが最小となるわけだから、インピーダンスは最大となる。つまり、微小な電流に対して電圧が最大となるような共振が生じる。このとき、コイルとコンデンサに流れる電流は、抵抗を流れる電流の Q 倍であり、互いに逆向きになっている。

4 まとめ

以下に Q 値の解釈についてまとめる。

1) エネルギーの比率

$$Q = 2\pi \frac{\text{ある瞬間に系に蓄えられているエネルギー}}{\text{一周期の間に系から散逸するエネルギー}}$$

2) 電圧値の比率 (直列共振回路)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{|V_L|}{|V_R|} \\ &= \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{|V_C|}{|V_R|} \end{aligned}$$

3) 振幅が $e^{-\pi}$ に減衰するまでの波の数

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi f_0}{2\gamma} = \frac{\tau}{T_0}$$

4) 半値幅

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

参考文献

[1] 齋藤正男: “改訂　電気回路入門,” コロナ社, 1981.
[2] http://fourier.eng.hmc.edu/e84/lectures/ch3/node9.html