Fourier変換　超入門

牧野　泰才

目次

- Fourier変換って何?
- 基本的な知識
  - 時間ー周波数領域の相互関係
  - 畳みこみ積分
- サンプリング定理って何?

目的

- 実験や解析等でFourier変換を使う際に、間違った使い方をしないようにする
- 信号処理の基礎的な考え方の大枠をとらえる
- 数学的な正確さ、厳密さは今回は対象外。細かいところは、専門書を見て復習
  →そのとき、何を言っているのかを分かるようにしたい

Fourier変換って何?

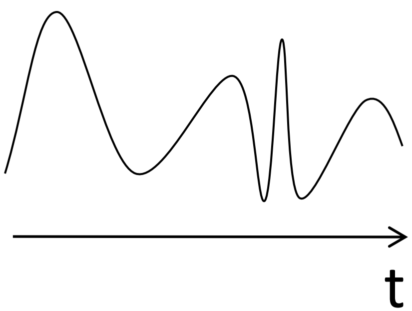
- 時間・空間領域の波形を、周波数で展開する
  （以降では、時間の場合のみ表記）

- 時間波形は、様々な振動成分の線形足し合わせとして表現できる

定義式

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \underline{f(t)}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{dt}$$

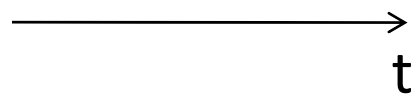
変換後の結果　　　変換したい元の時間波形



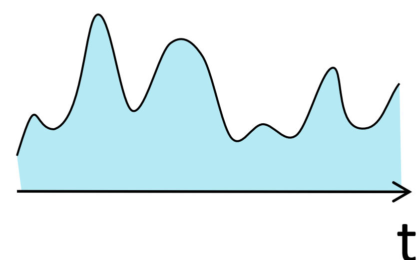
×

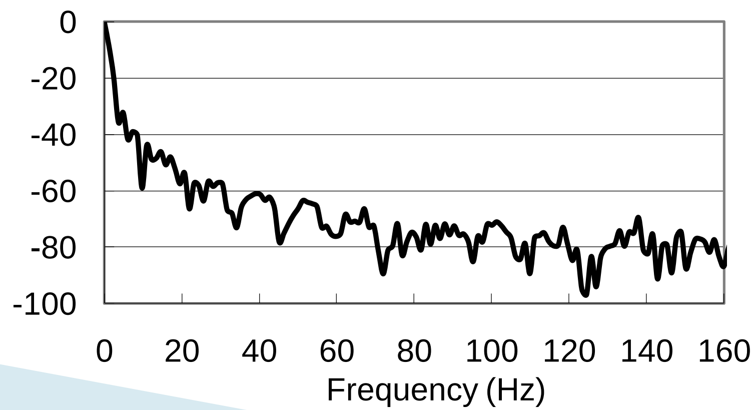
?

$e^{-\mathrm{j}\omega t}$



=





ベクトルの内積を思い出す

- ベクトルの内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$
$$= \sum_i a_i b_i$$

- 内積の値は、2つのベクトルが「**どれだけ同じ方向を向いているか**」を表す
- 0の時は、2つのベクトルは直交

ベクトルの内積→関数の内積

- あるベクトルが連続関数の離散サンプリング点列だったとした場合、この刻み幅を無限小にしていけば関数の内積と考えて良さそう

$$\int f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

- この値は2つの関数の類似度を表すはず
- 全く似ていない場合は、

$$\int f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$$

つまり直交する

Fourier変換の式をよく眺めてみる

$$F(\omega)=\int f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

- つまり、ω = ω_0 のときのF(ω)の値F(ω_0)は、f(t)の中のcos(ω_0 t)っぽい成分を実部に、sin(ω_0 t)っぽい成分を虚部に持つ

1つの周波数に対して、なんでcos(x), sin(x)両方の内積を取るの?

- Ans.

  cos(x)は偶関数、sin(x)は奇関数なので、例えばcos(x)だけだと奇関数は表現できない

  逆に言うと、偶関数のFourier変換には実部しか出てこない

$$F(\omega_0) = \underbrace{A(\omega_0)}_{\text{偶関数成分の大きさ}} + j\underbrace{B(\omega_0)}_{\text{奇関数成分の大きさ}}$$

ある周波数ω_0の…　　偶関数成分の大きさ　　奇関数成分の大きさ

三角関数の角の合成を思い出す

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x + \theta)$$

- だったので、Fourier変換後のcosっぽい成分がA、sinっぽい成分がBだった場合には、その周波数成分の振幅は $\sqrt{A^2 + B^2}$
- 一般的に、Fourier変換後の結果は、パワースペクトルとして、これが使われる

注：Fourier変換後の結果はあたかも正数のように見えるけれど、実際は複素数。あれはその絶対値

ここまでのまとめ

- Fourier変換は、特定の周波数成分がどれくらい入っているかを、内積を使って求めるもの
- 実部が偶関数、虚部が奇関数
- 良く見るグラフ（パワースペクトル）は絶対値
  - 実信号のFourier変換は、必ずω=0を中心に左右対称
    なぜなら、Fourier逆変換で必ず実部のみの信号になるはずなので、偶関数である必要がある

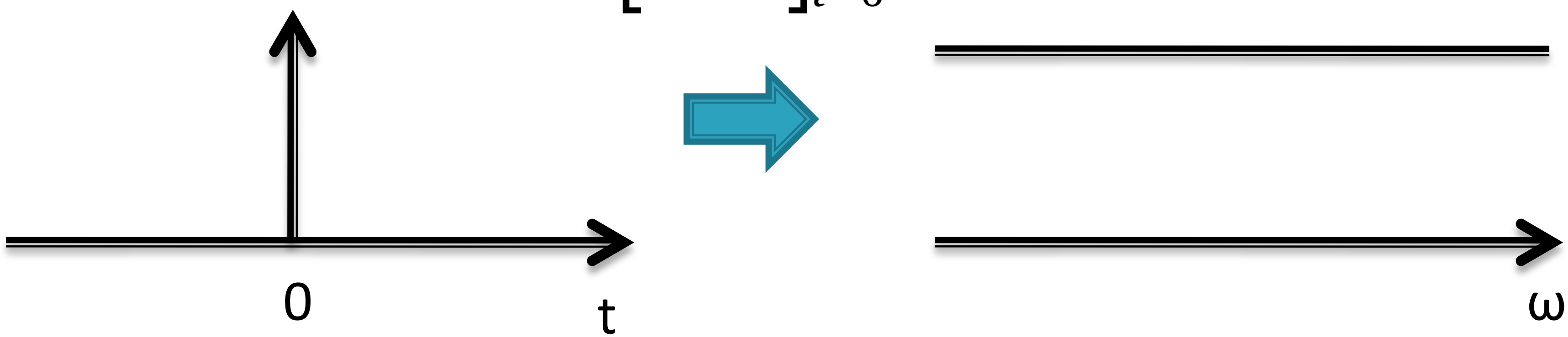
時間ー周波数領域の相互関係その１

- 時間領域で局在　　⇔　周波数領域で偏在
- 周波数領域で局在 ⇔　時間領域で偏在

例1：δ関数

- δ関数のFourier変換は…

$$F(\omega) = \int \delta(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$
$$= \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=0} = 1$$



すべての周波数成分を含む
実部のみ→偶関数のみで表わされる
原点で1のcosの足し合わせ

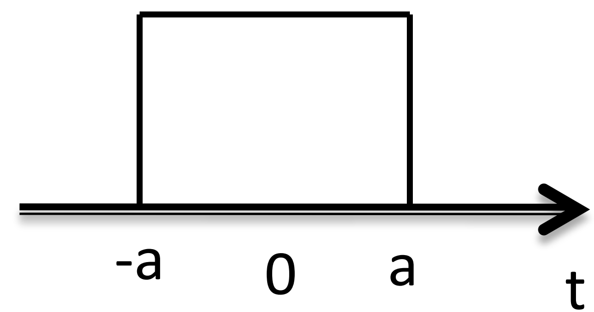
例2：矩形 $f(t)=\begin{cases}1 & (-a \le t \le a) \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$

- 原点中心・幅2aの矩形波のFourier変換は

$$F(\omega)=\int f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

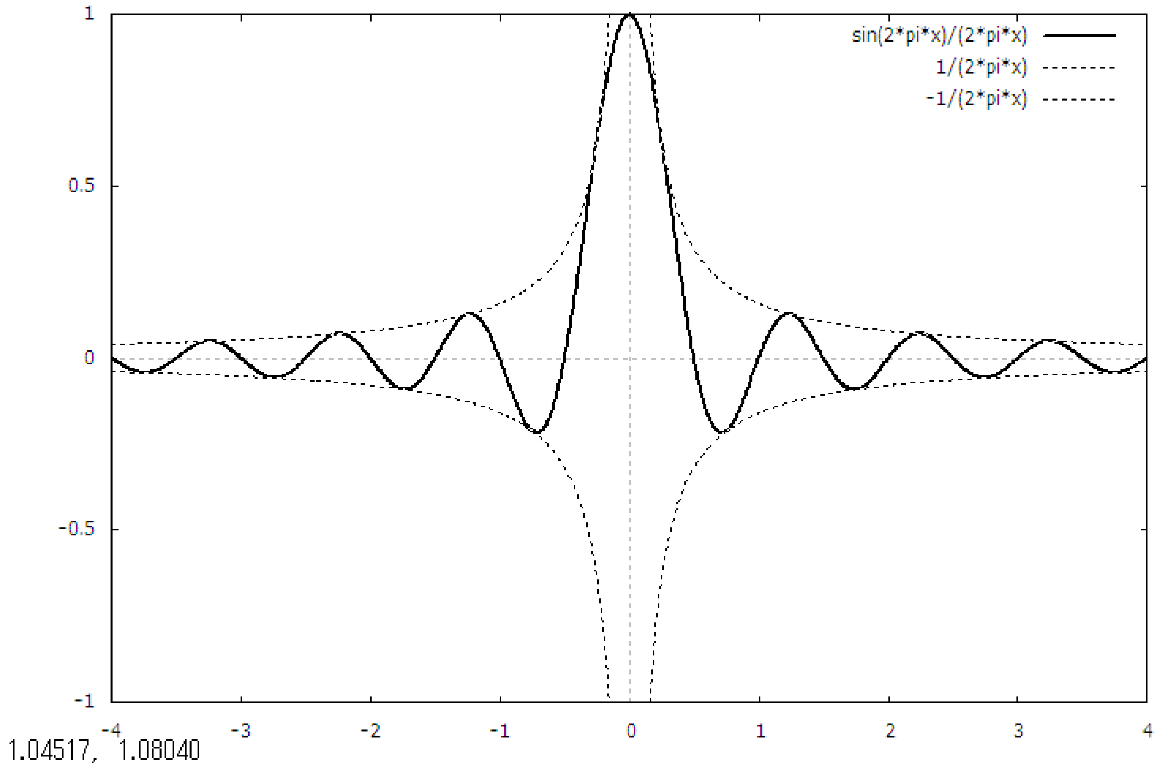
$$=\int_{-a}^{a} e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{\mathrm{j}\omega}e^{-\mathrm{j}\omega t}\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{j}\omega a}-e^{-\mathrm{j}\omega a}}{\mathrm{j}\omega}=2a\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}$$



これも偶関数のみで表わされている

Sinc関数



- 0になる点は$\sin(a\omega) = 0$の点なので、最初の点は$\omega_0=\pi/a$
- a（矩形の幅）が大→ω_0が小

例3：ガウシアン

- 分散1/aのガウシアンは…　$f(t)=e^{-at^2}$

  （省略）
- ガウシアンになる

$$F(\omega)=Ae^{-\omega^2/4a}$$

- 時間領域と周波数領域において、ガウシアンの分散がちょうど反対の関係になっている

- 時間領域で狭ければ周波数領域で広い
- 周波数領域で狭ければ時間領域で広い

ここまでのまとめ

- 時間領域で局在　⇔　周波数領域で偏在
- 周波数領域で局在 ⇔　時間領域で偏在

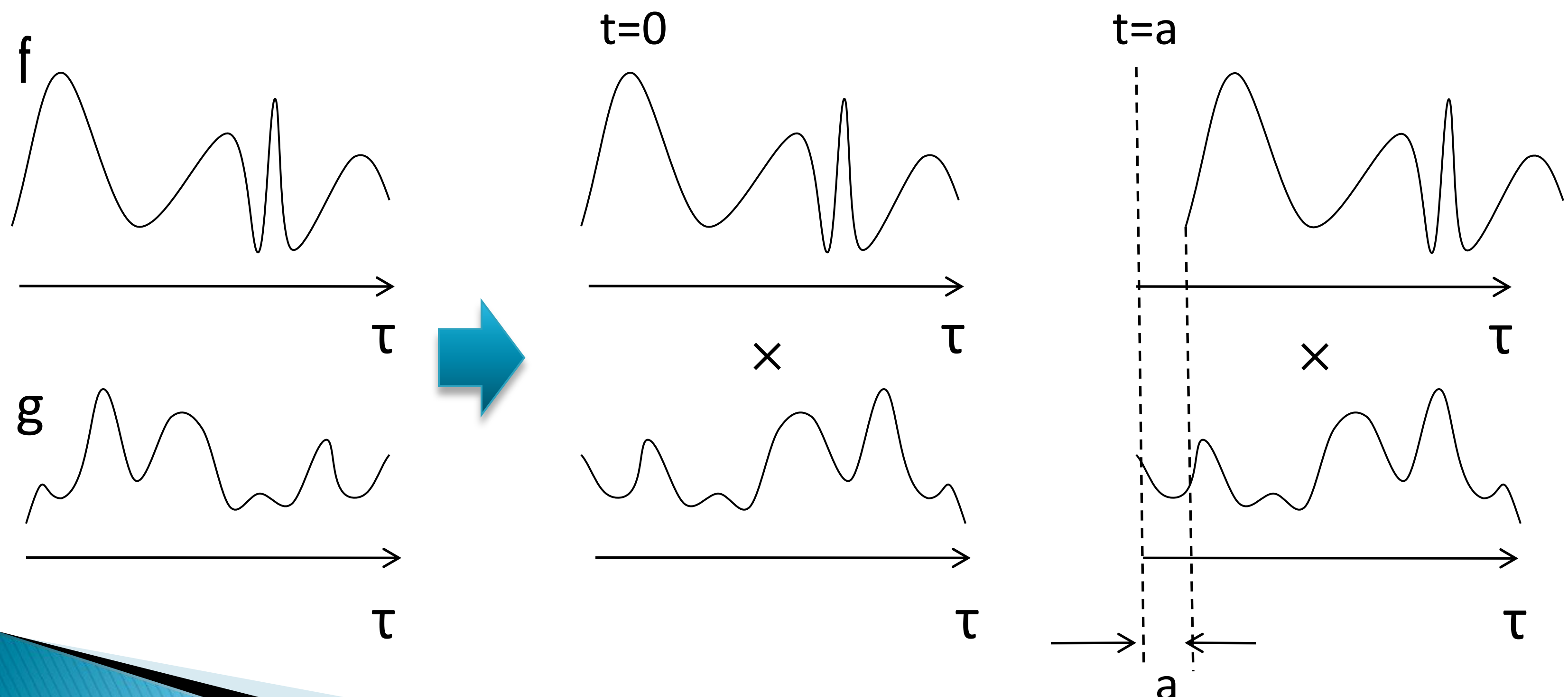
- cf. 不確定性原理もこれ
  - 量子力学の世界において、位置と運動量を同時に決定できない。
    - 位置を正確に定めると運動量に不確定性が
    - 運動量を正確に定めると位置に不確定性が
  - 量子力学では、運動量は波長と関連付けられるので

時間ー周波数領域の相互関係その2

- 時間領域の掛け算 ⇔ 周波数領域の畳み込み
- 周波数領域の掛け算 ⇔ 時間領域の畳み込み

畳み込み積分

$$f * g(t) = \int f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$



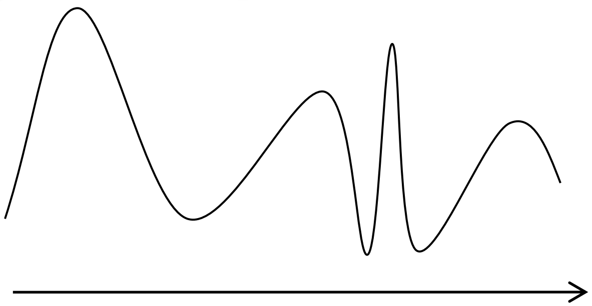
移動平均ってどんな操作?

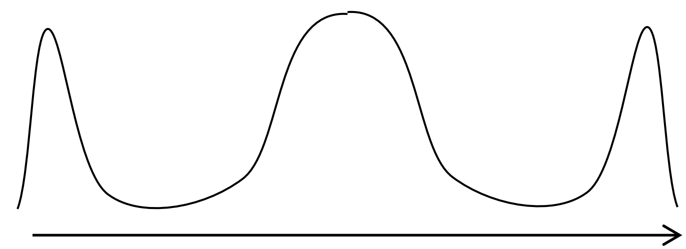
- 信号のノイズを低減するために、移動平均をとる
  - ある時刻の周辺の範囲のデータを足し合わせ、その値を代表値にする

- これは正に畳み込み積分

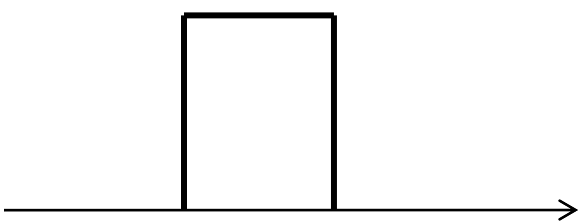
- ということは…
  「時間領域の畳み込み⇔周波数領域の掛け算」
  なので、周波数領域では、元の周波数特性に、何かを掛けたことになるはず(そしてそれは高周波ノイズを低減するような操作になっているはず)

移動平均



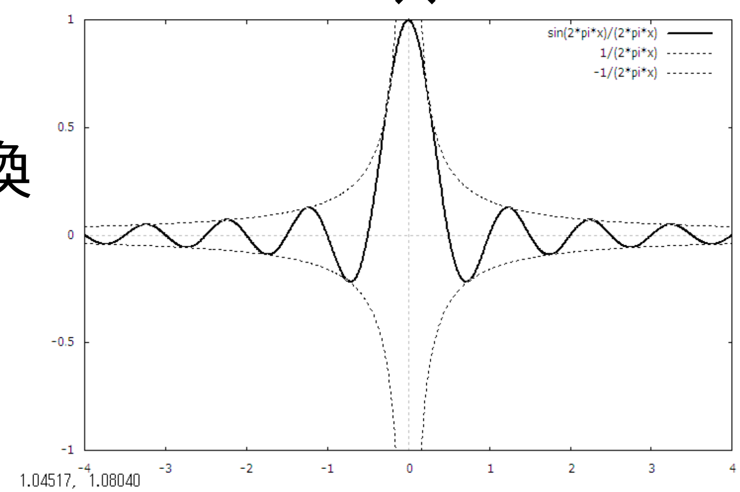


＊　　t　　×　　ω



t

Fourier 変換

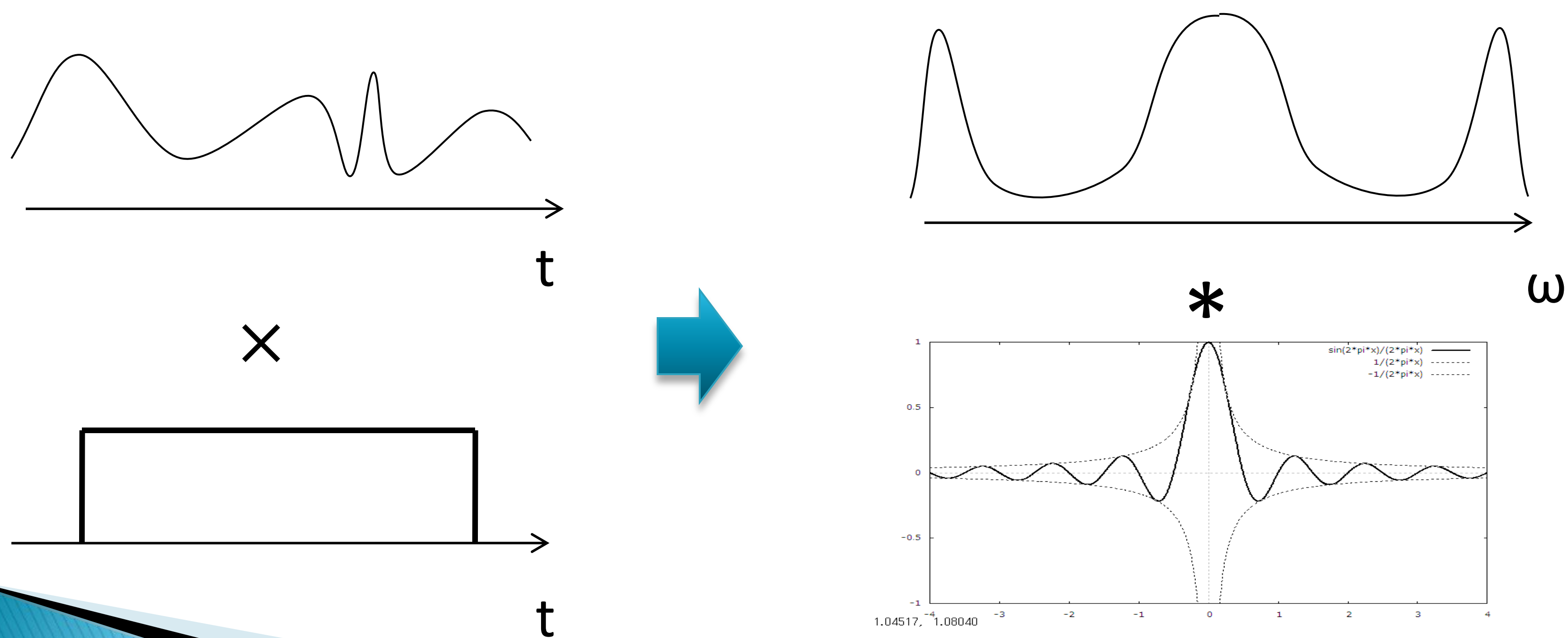


Sinc関数がLPFのような役割を果たす
ただし、フィルタの特性は特徴的
(0になってしまう周波数がある!)

有限時間の信号

- Fourier変換で仮定するのは、無限時間の信号
- 実際に得られるのは、有限時間の信号

  →無限時間の信号を矩形で切り取ったとみなせる



畳み込み積分のまとめ

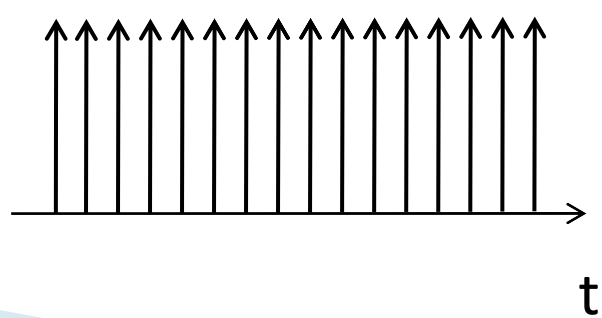
- 時間領域の掛け算　⇔ 周波数領域の畳み込み
- 周波数領域の掛け算 ⇔ 時間領域の畳み込み

- 畳み込み積分は、移動平均で考えると分かりやすい
  - 移動平均は、特殊なLPFをかけたのと同じ
  - 周波数が0にならないようにするには、時間領域でガウシアンの重みをかけて平均すれば良い

サンプリングを理解する

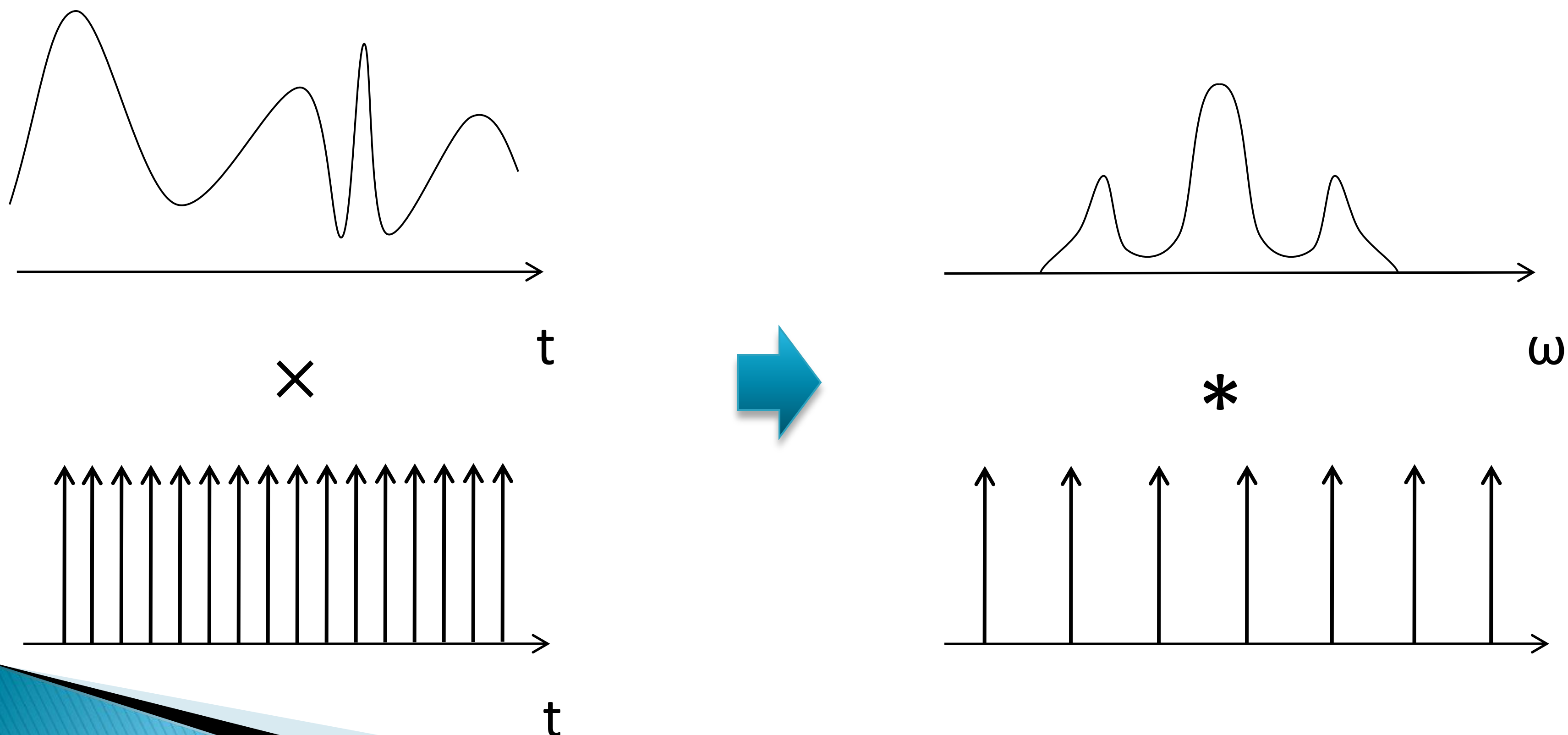
- サンプリングという操作は、PC等で信号を取得する上では絶対にしなければならないもの
- このとき、周波数領域で何が起こっているのか?

- サンプリングは、元の連続信号にδ関数列を掛けたことに対応
  - δ関数列のFourier変換はδ関数列
    時間領域の間隔が狭い⇔周波数領域は広い

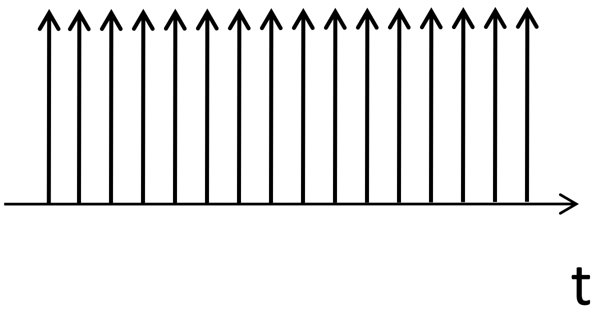


時間領域のδ関数列の掛け算なので…

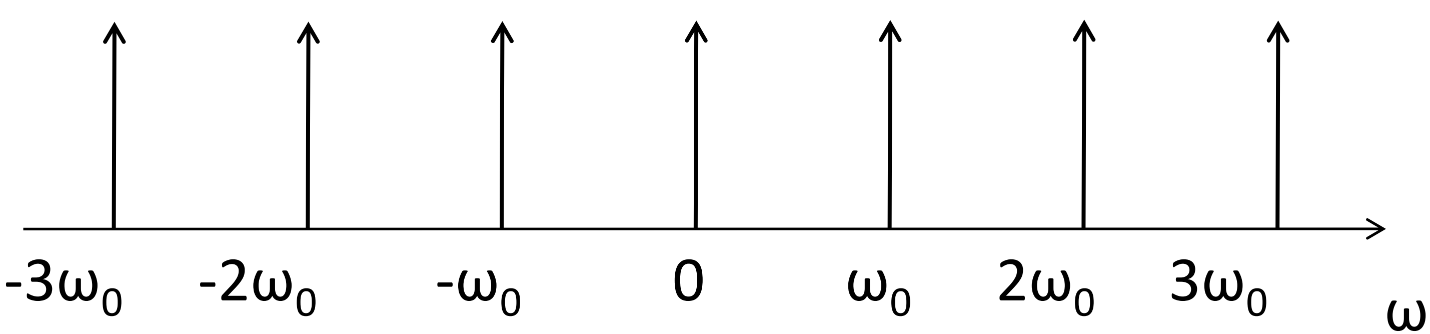
- 周波数領域では、元のパワースペクトルとδ関数列の畳み込み



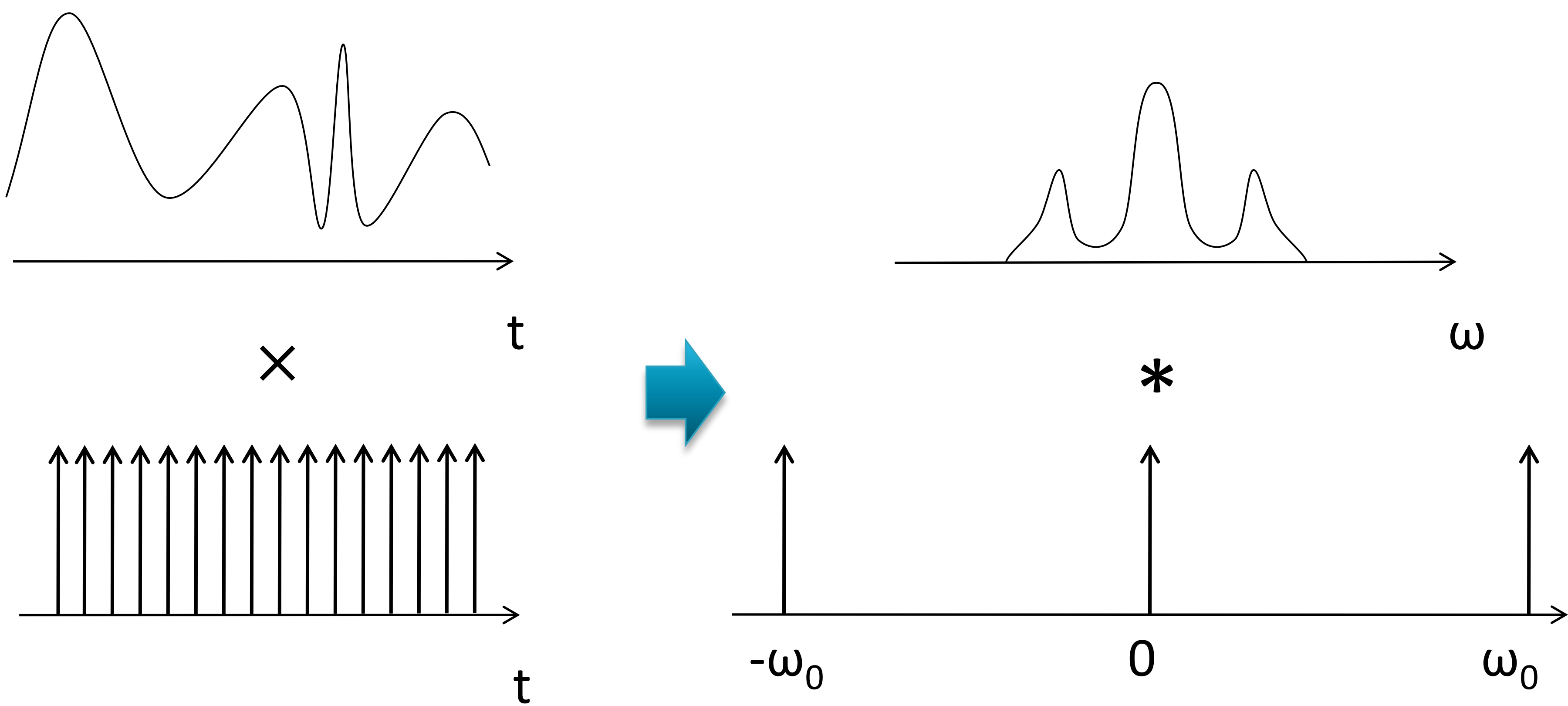
δ関数列のFourier変換の特徴



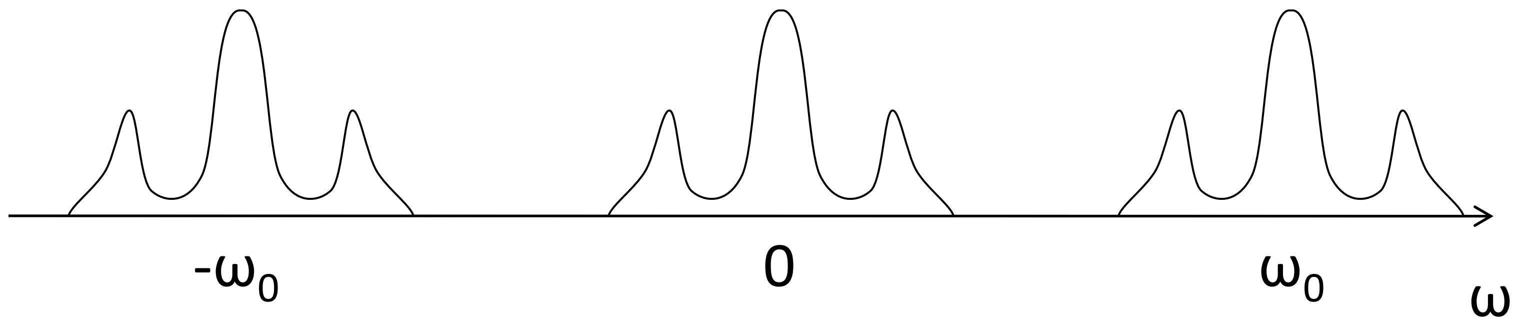
基本周波数（サンプリング周波数）が
ω_0 Hzとすると…
（つまりδ関数列の幅がT_0のとき、$\omega_0 = 2\pi / T_0$）



十分サンプリング周波数が高い場合



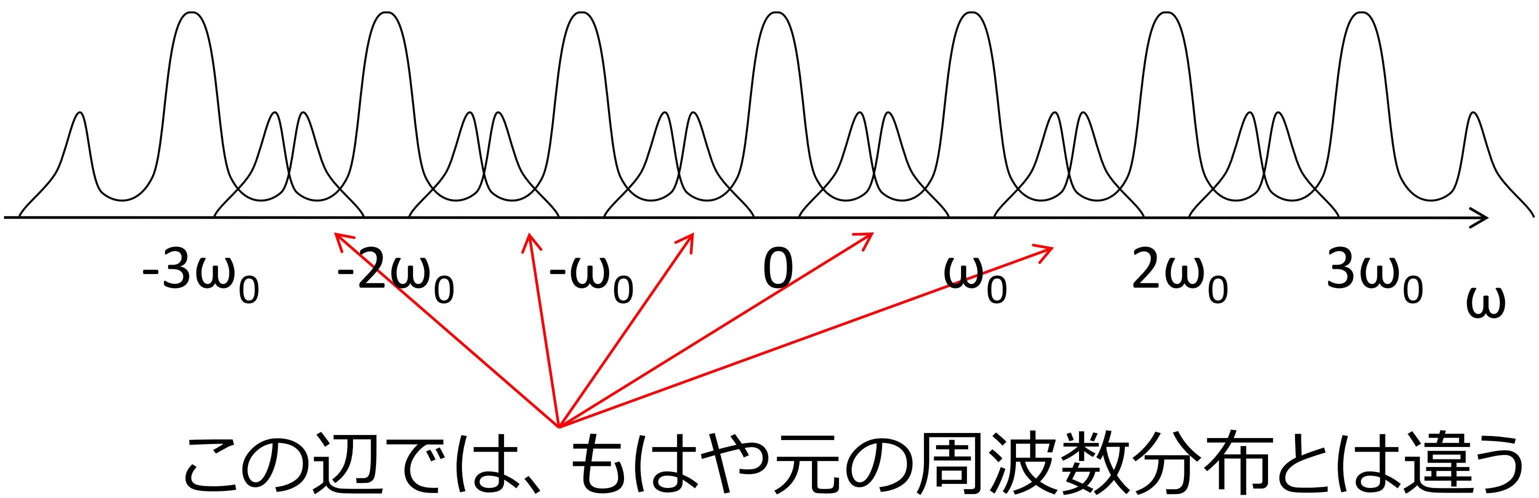
畳み込みの結果は…



元の周波数分布がそのまま保存される

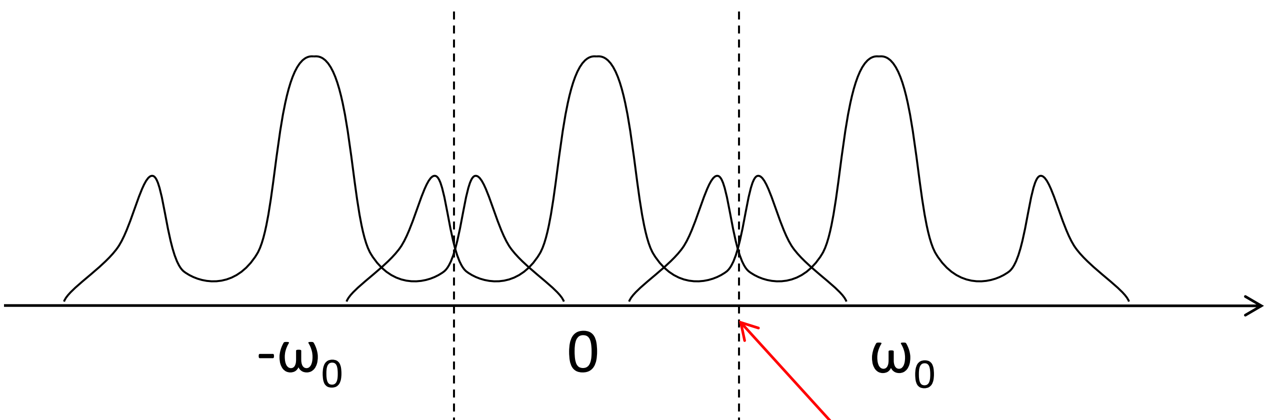
サンプリング周波数が低いと…

- 時間領域のδ関数列の幅が粗い
  →周波数領域のδ関数列の幅が狭い



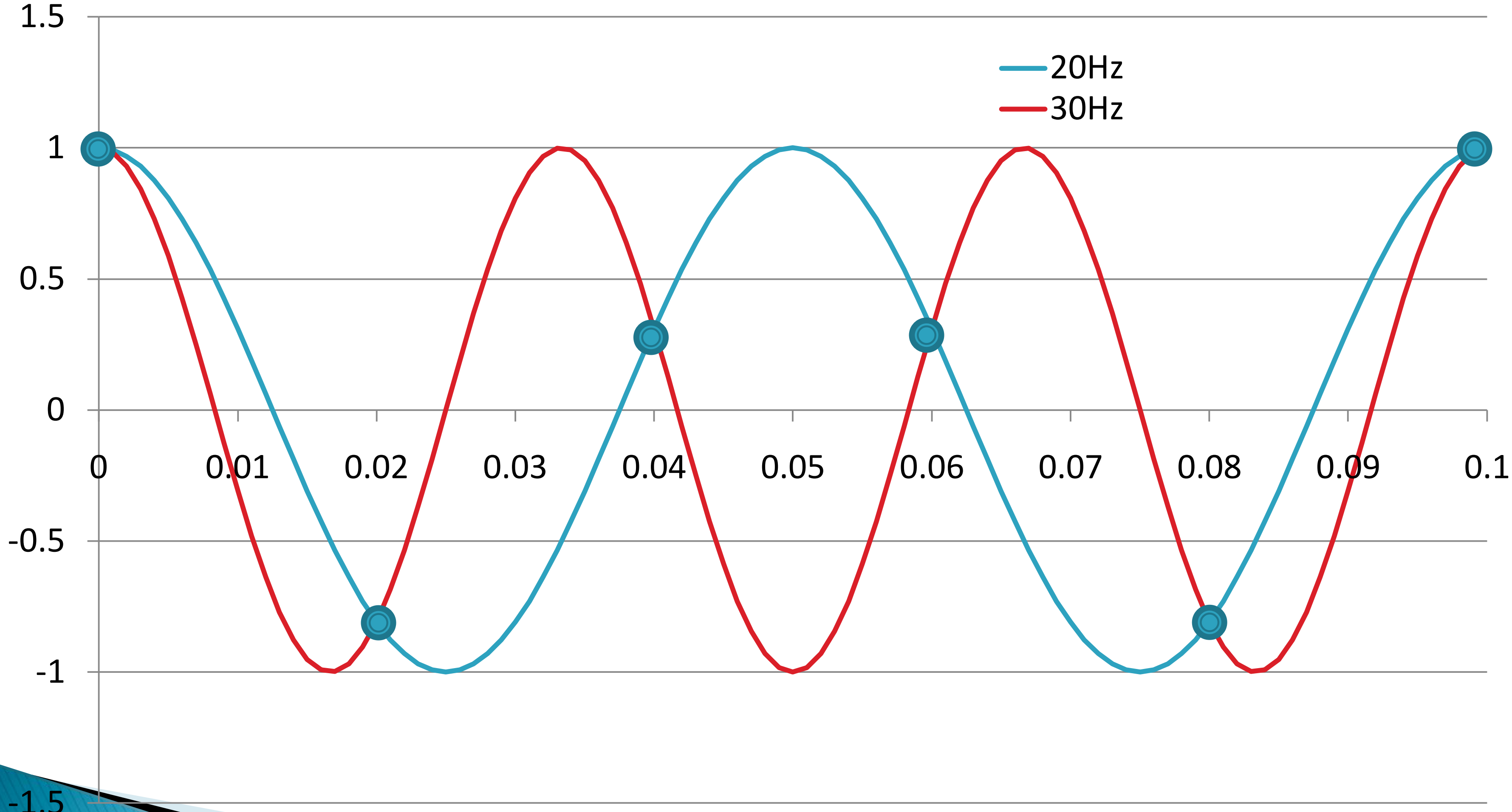
エリアシング

- 高い周波数成分が、低周波側に侵入してくる
  - 自動車のCMでタイヤが逆回転して見える
  - 本来は高速回転している(高い周波数成分をもつ)が、カメラのサンプリングが遅いため、低速回転（低い周波数成分）として見えてしまう



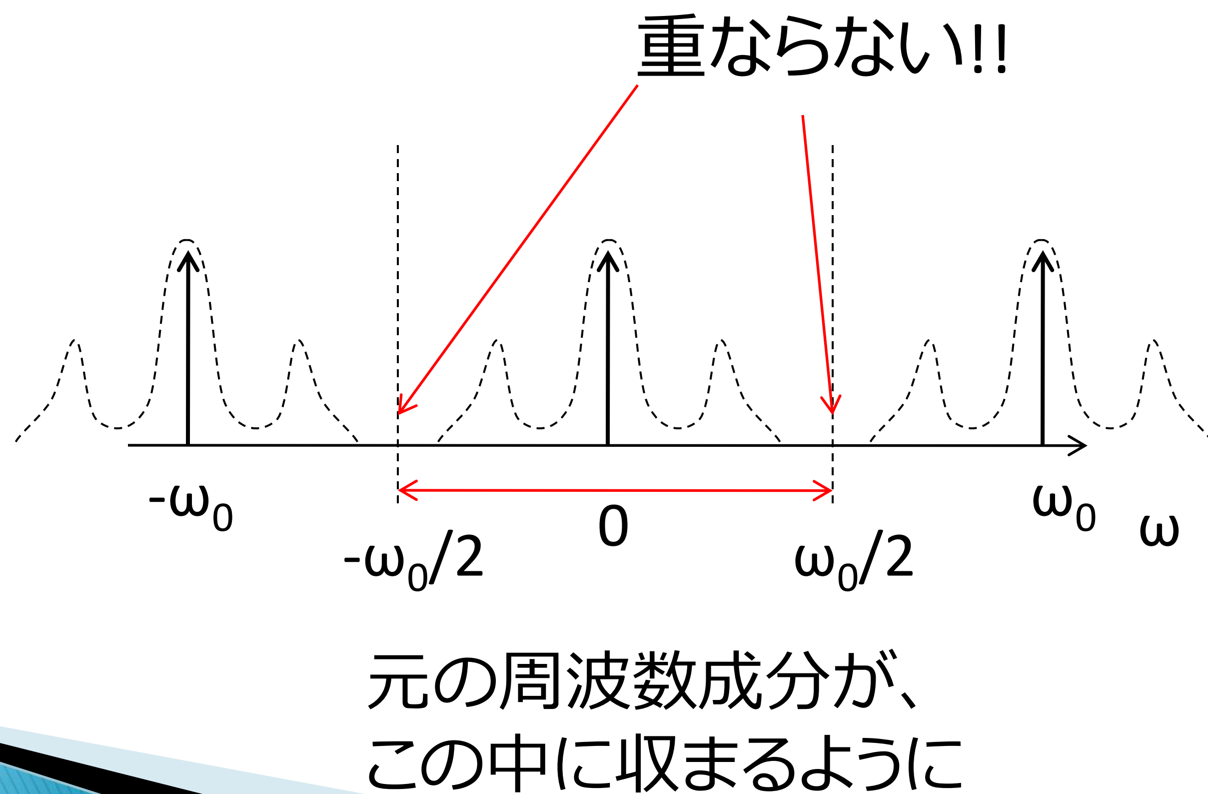
ナイキスト周波数 ＝ $\omega_0/2$

50Hzサンプリング（ナイキスト周波数25Hz）のときの　20Hzと30Hz



エリアシングを起こさないためには…

- ナイキスト周波数（サンプリング周波数の半分）以上の周波数成分がないようにする



サンプリング定理

- サンプリングされた信号を、一意に復元するためには、元の信号がサンプリング周波数の半分（ナイキスト周波数）以下に帯域制限されている必要がある
- ある周波数帯域の信号を取得したい場合には、少なくともその2倍以上のサンプリング周波数で計測しなければならない（経験的には、10倍程度が理想的）

サンプリングまとめ

- データを測定するときに注意すべき点
  - サンプリング周波数は、対象とする周波数の、少なくとも2倍以上が必要
  - LPFを使うなどして、サンプリング周波数の半分（ナイキスト周波数）以上の周波数成分が、入らないようにする