5. t 検定

（学習内容）

・ *t 検定の原理を理解する*

・ *t 検定の方法を学ぶ*

5.1 ２つの母平均の差に関する検定

2 つの正規母集団から得られる 2 組のデータを比べる

（問題）

2 台の機械 A,B の生産能力を比べる。A から n=10 個、B から m=9 個のデータをサンプリングした。

A：78　80　79　83　82　85　78　74　76　84　（個/時間）

B：81　84　82　88　86　83　78　84　89　（個/時間）

機械 A の母集団分布が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$、機械 B の母集団分布が $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき、μ_1 と μ_2 の値は等しいか。σ_1^2, σ_2^2 は未知。

(1) 考え方

$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$ が互いに独立に $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ に従い、$x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2m}$ が互いに独立に $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき、

- $\bar{x}_1$ は $N(\mu_1, \sigma_1^2/n)$、$\bar{x}_2$ は $N(\mu_2, \sigma_2^2/m)$ の正規分布に従う
- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ は $N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m)$ の正規分布に従う
- これを標準化すると

$$u = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}}$$ は $N(0, 1^2)$ に従う

- 検定における仮説 H_0：$\mu_1 = \mu_2$ のもとでの検定統計量は

$$u_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}}$$

σ_1^2, σ_2^2 は未知 → V_1, V_2 で置き換える

(2) 等分散を仮定した場合：　Student の t 検定

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ とし、σ^2 の推定値 V は

$$V = \frac{S_1 + S_2}{(n-1) + (m-1)}$$ と置く

$$\boxed{t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V \cdot (1/n + 1/m)}} \quad \text{は自由度 n+m−2 の t 分布に従う}}$$

(3) 等分散を仮定しない場合：　Welch の t 検定

σ_1^2 の推定値は $V_1=S_1/(n-1)$、σ_2^2 の推定値を $V_2=S_2/(m-1)$ と置く

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V_1/n + V_2/m}}$$ は自由度φ*のｔ分布に従う

$$\phi^* = \frac{\left(\frac{V_1}{n} + \frac{V_2}{m}\right)^2}{\left(\frac{V_1}{n}\right)^2 \frac{1}{n-1} + \left(\frac{V_2}{m}\right)^2 \frac{1}{m-1}}$$ φ*：等価自由度（整数とは限らない）

5.2 Student のｔ検定

（1）等分散を仮定した場合の母平均の差の検定手順

1）帰無仮説 H_0：$\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

2）有意水準αを定める　　α=0.05

3）棄却域Ｒを求める

$|t_0| \geqq t(10+9-2,\ 0.05) = t(17,\ 0.05) = 2.110$

4）データ $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$、$x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}$ から検定統計量 t_0 の値を計算する

$$\bar{x}_1 = (78+80+79+83+82+85+78+74+76+84)/10 = 79.9$$

$$\bar{x}_2 = (81+84+82+88+86+83+78+84+89)/9 = 83.9$$

$$S_1 = \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 114.9$$

$$S_2 = \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 94.89$$

$$V = (S_1 + S_2)/(n+m-2) = (114.9 + 94.89)/17 = 12.34$$

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{V(1/n + 1/m)}} = \frac{(79.9 - 83.9)}{\sqrt{12.34(1/10 + 1/9)}} = -2.47$$

5）t_0 が棄却域にあれば有意と判定し、H_0 を棄却

$|t_0| = 2.47 \geqq t(17, 0.05) = 2.110$　となり H_0 は棄却

（2）等分散を仮定した場合の母平均の差の推定手順

1）点推定：　$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 79.9 - 83.9 = -4.0$

2）区間推定：

$$-t(17,\ 0.05) \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V(1/n + 1/m)}} \leq t(17,\ 0.05)$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t(17,\ 0.05)\sqrt{V(1/n + 1/m)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t(17,\ 0.05)\sqrt{V(1/n + 1/m)}$$

$$-4.0 - 2.110\sqrt{12.34(1/10 + 1/9)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -4.0 + 2.110\sqrt{12.34(1/10 + 1/9)}$$

$$-7.4 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.6$$

5.3 Welch のｔ検定

（1）等分散を仮定しない場合の母平均の差の検定手順

1）帰無仮説 H_0：$\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

2）有意水準αを定める　　α=0.05

3）棄却域 R を求める

$$\bar{x}_1 = 79.9 \qquad \bar{x}_2 = 83.9$$
$$S_1 = 114.9 \qquad S_2 = 94.89$$
$$V_1 = S_1/(n-1) = 114.9/9 = 12.77$$
$$V_2 = S_2/(m-1) = 94.89/8 = 11.86$$
$$\phi^* = \frac{(V_1/n + V_2/m)^2}{((V_1/n)^2/(n-1) + (V_2/m)^2/(m-1))}$$
$$= (12.77/10 + 11.86/9)^2/((12.77/10)^2/9 + (11.86/9)^2/8) = 16.9$$
$$|t_0| \geq t(16.9, 0.05) = 0.1 \times t(16, 0.05) + 0.9 \times (17, 0.05) = 2.111$$

4）データ $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$、$x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}$ から検定統計量 t_0 の値を計算する

$$t_0 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{V_1/n + V_2/m}} = \frac{(79.9 - 83.9)}{\sqrt{12.77/10 + 11.86/9}} = -2.48$$

5）t_0 が棄却域にあれば有意と判定し、H_0 を棄却

$|t_0|=2.48 \geqq t(16.9, 0.05)=2.111$　となり H_0 は棄却

(2) 等分散を仮定しない場合の母平均の差の推定手順

1）点推定：　$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 79.9 - 83.9 = -4.0$

2）区間推定：

$$-t(16.9, 0.05) \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V_1/n + V_2/m}} \leq t(16.9, 0.05)$$
$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t(16.9, 0.05)\sqrt{V_1/n + V_2/m} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t(16.9, 0.05)\sqrt{V_1/n + V_2/m}$$
$$-4.0 - 2.111\sqrt{12.77/10 + 11.86/9} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -4.0 + 2.111\sqrt{12.77/10 + 11.86/9}$$
$$-7.4 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.6$$

5.4 対応がある場合の２つの母平均の差の検定

（問題）

ある機械で生産された製品の厚さを A,B の 2 箇所で測定し、次のデータを得た。

A：81　84　82　88　86　85　79　84　85　（mm）

B：80　82　81　85　84　85　81　82　83　（mm）

A,B の 2 箇所の厚さは等しいと言えるか。

x_{1i} と x_{2i} を対にして考えることができる

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$　とすると、

$d_1, d_2, d_3, \cdots d_n$ は、互いに独立に $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_d^2)$ に従う

これは、１つの母集団における母平均の検定と推定と同じに考えることができる

$$t = \frac{\bar{d} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V_d/n}}$$ は自由度 n-1 の t 分布に従う

検定等計量は

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{V_d / n}}$$

(1) 対応がある場合の母平均の差の検定手順

1) 帰無仮説 H_0：$\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

2) 有意水準 α を定める　　α=0.05

3) 棄却域 R を求める　　$|t_0| \geqq t(8, 0.05) = 2.306$

4) データ $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$、$x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}$ から検定統計量 t_0 の値を計算する

$$\bar{d} = \frac{\sum (x_{1i} - x_{2i})}{n} = 11/9 = 1.22$$

$$S_d = \sum (d_i - \bar{d})^2 = 17.56$$

$$V_d = S_d / (n-1) = 17.56/8 = 2.19$$

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{V_d / n}} = \frac{1.22}{\sqrt{2.19/9}} = 2.48$$

5) t_0 が棄却域にあれば有意と判定し、H_0 を棄却

$|t_0| = 2.48 \geqq t(8, 0.05) = 2.306$ となり H_0 は棄却

(2) 対応がある場合の母平均の差の推定手順

1) 点推定：　$\mu_1 - \mu_2 = \bar{d} = 1.22$

2) 区間推定：

$$-t(8, 0.05) \leq \frac{\bar{d} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V_d / n}} \leq t(8, 0.05)$$

$$\bar{d} - t(8, 0.05)\sqrt{V_d / n} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{d} + t(8, 0.05)\sqrt{V_d / n}$$

$$1.22 - 2.306\sqrt{2.19/9} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 1.22 + 2.306\sqrt{2.19/9}$$

$$0.08 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.36$$